This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06910536 3

2

is Ostendinger
Mann 1829.

CHRIST. FRIEDR. PFLEIDERERS,

WEIL. PROFESSORS DER MATHEMATIK UND PHYSIK AUF DER UNIVERSITÄT ZU TÜBINGEN,

ACADEMISCHE SCHRIFTEN.

ZWEITES HEFT.

ENTHALTEND

DIE

ABHANDLUNGEN ZUM V. BUCHE DER ELEMENTE EUCLID'S,

ins Deutsche übersetzt und mit den handschriftlichen Nachträgen des Verfassers vermehrt,

VON

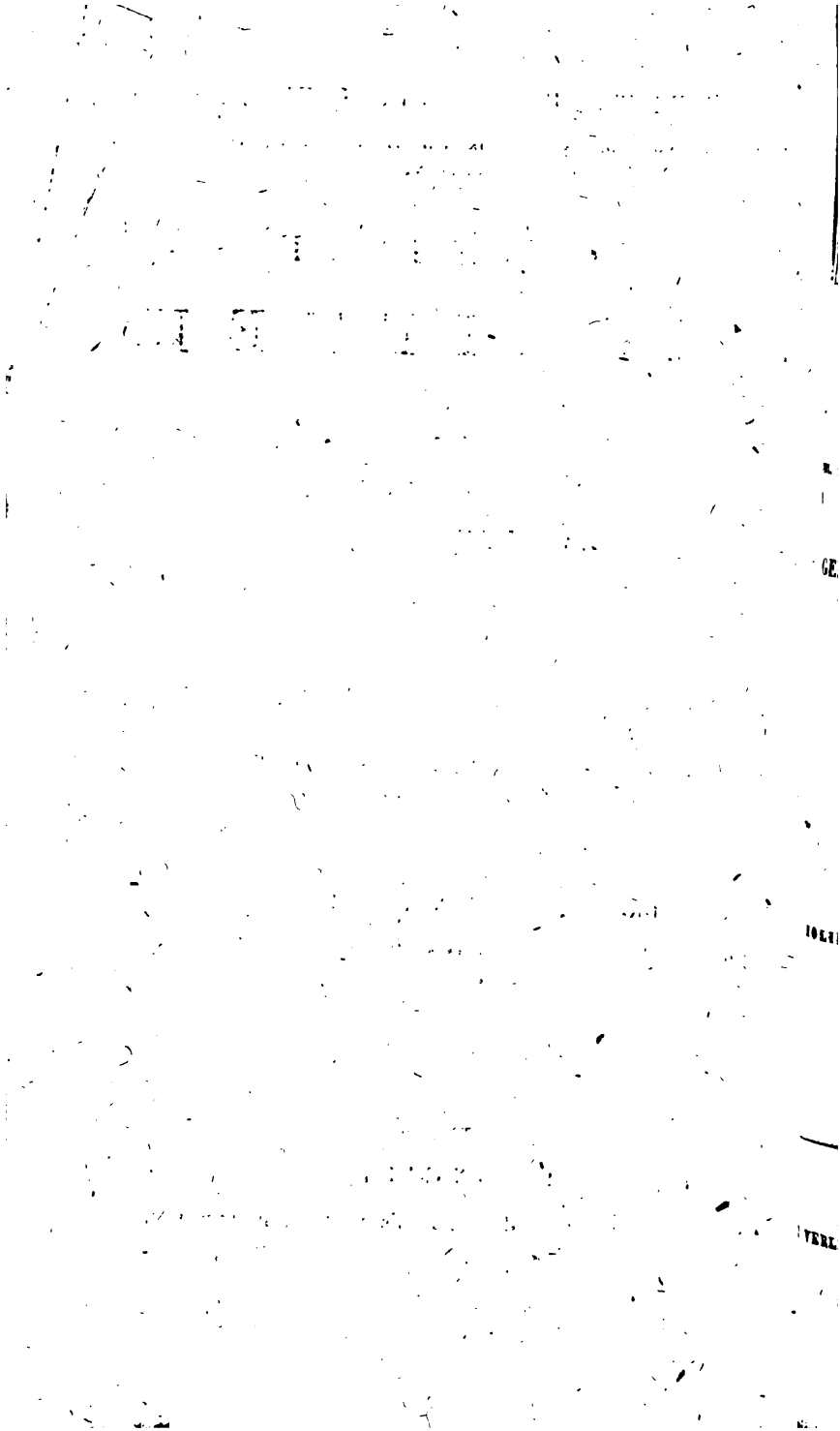
DR. PLIENINGER,

PROFESSOR IN STUTTGART.

STUTTGART,

IM VERLAG DER J. B. METZLER'SCHEN BUCHHANDLUNG.

1827.



SCHOLIEN

ZU

EUCLID'S ELEMENTEN,

AUS

CHRIST. FRIEDR. PFLEIDERERS,

WEIL. PROFESSORS DER MATHEMATIK UND PHYSIK AUF DER UNIVERSITÄT ZU TÜBINGEN,

GEDRUCKTEN ACADEMISCHEN SCHRIFTEN

UND

HANDSCHRIFTLICHEN NACHLASSEN

ZUSAMMENGESTELLT.

VIERTES HEFT.

SCHOLIEN ZUM FÜNFTEN BUCHE DER ELEMENTE.

STUTTGART,

IM VERLAG DER J. B. METZLER'SCHEN BUCHHANDLUNG.

1827.

ins vierten Heft zum fünften Buch befindlichen einzubinden.

SCHOLIEN

ZU

EUCLID'S ELEMENTEN,

AUS

CHRIST. FRIEDR. PFLEIDERERS,

[illegible] DER [illegible] AUF DER UNIVERSITÄT
ZU THÜRINGEN,

GEDRUCKTEN ACADEMISCHEN SCHRIFTEN

UND

MANDSCHRIFTLICHEN NACHLASSEN

[illegible]

VIERTES HEFT.

[illegible] BUCHE DER ELEMENTE.

[illegible]

[illegible] DER [illegible] HANDLUNG.

Vorwort.

Die vier in diesem IIten Hefte der academischen Schriften Pfleiderer's enthaltenen Abhandlungen sind:

I. Die im Jahre 1782. als Dissertation in lateinischer Sprache unter dem Titel Expositio et dilucidatio Libri quinti Elementorum Euclidis. Pars I. erschienene Abhandlung, ins Deutsche übersetzt, welche ungefähr die Hälfte der Lehrsätze des V. Buches commentirt; deren Pars II. aber weder im Druck erschienen ist, noch in den Nachlässen Pfleiderers ausgearbeitet existirt.

II. Die von Hrn. Ephorus Hauber im Jahre 1793. für den Zweck seiner academischen Promotion verfaſste und vertheidigte Dissertation: Propositionum de rationibus inter se diversis demonstrationes, ex solis Libri V. Elementorum definitionibus ac propositionibus deductae, ins Deutsche übersetzt. Da in nr. 1. die Sätze von Ungleichheit der Verhältnisse nicht berührt sind, so hat der Hr. Verfasser die Aufnahme

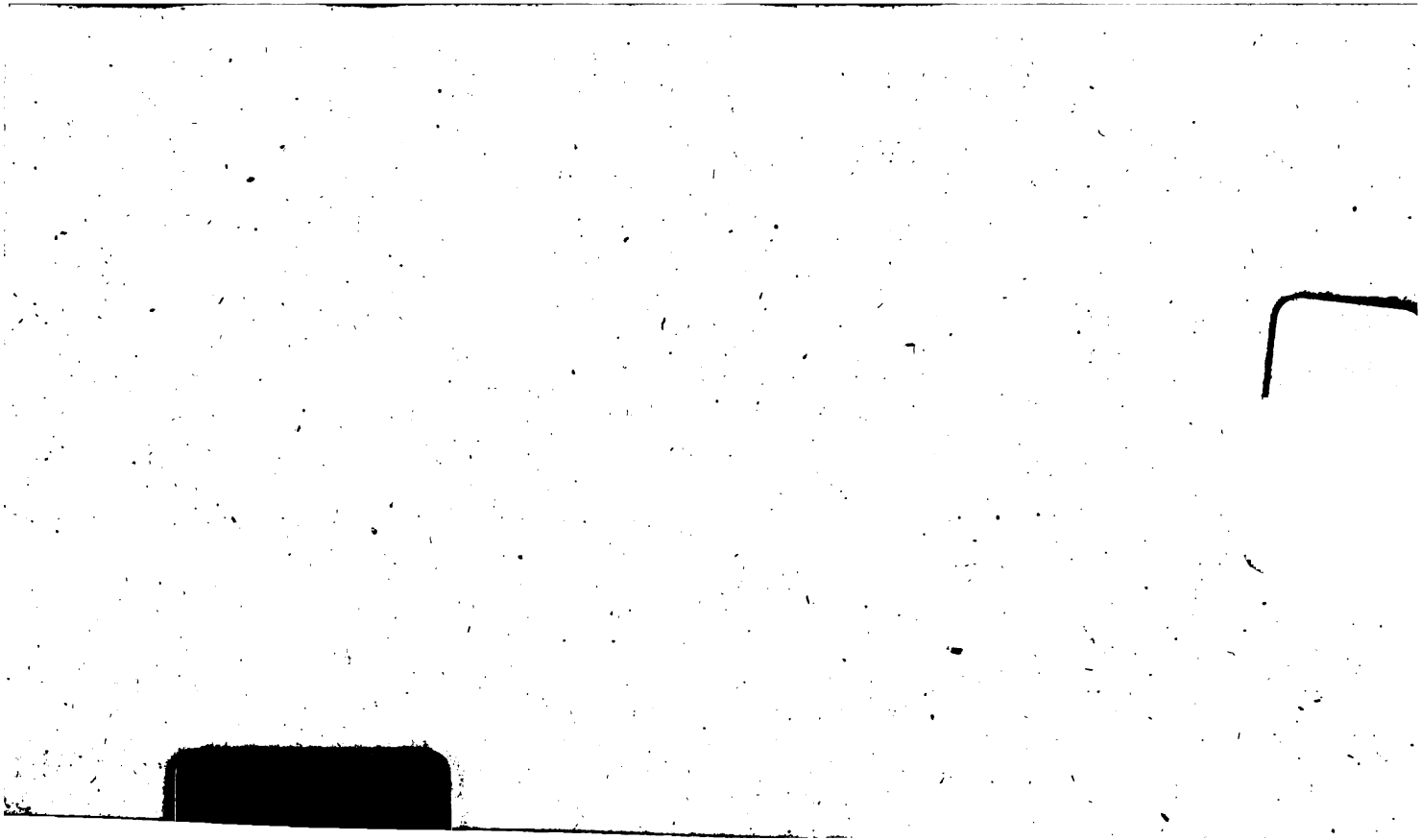
seiner Abhandlung nicht nur erlaubt, sondern auch angerathen und dabei erklärt: „dafs Pfleiderer einen grofsen Antheil an deren Abfassung gehabt habe." In jedem Fall dürfte auch ohne diesen Beisatz die Aufnahme dieser, im Sinn und Geist Pfleiderers abgefafsten Abhandlung als einer, zu den Pfleiderer'schen Bearbeitungen der Elemente gehörigen und dieselben ergänzenden Monographie über die ungleichen Verhältnisse, unter die academischen Schriften Pfleiderers, hinlänglich gerechtfertigt erscheinen.

III. Der in Hindenburgs Archiv der reinen und angewandten Mathematik Band II. 1798. Heft 7. u. 8. unter dem Titel: Deduction der Euclidischen Definitionen 3. 4. 5. 7. des V. Buches der Elemente, in deutscher Sprache erschienene Aufsatz, dessen Aufnahme unter die acad. Schriften Pfleiderers theils der Vollständigkeit der Materie wegen, theils auch aus dem Grunde nicht wohl umgangen werden konnte: weil namentlich dem jüngeren Theile des Publicums, für welches die Pfleiderer'schen Schriften von Interesse sind, das Hindenburg'sche Archiv nicht zu Gebot stehen dürfte. Die Bemerkung selbst, mit welcher Hindenburg diesen Aufsatz begleitet hat, kann den Herausgeber über dessen Wiederabdruck unter den acad. Schriften rechtfertigen: „Dieser „lehrreiche Aufsatz ist eine Revision und Ergänzung

„eines Theils der lateinischen Dissertation des „Hrn. Verfassers über das V. Buch der Elemente" (der Exp. et diluc. Libr. V. El. Eucl.) „und ist „zum Theil durch die Erneurung der Klagen über „Undeutlichkeit, Schwierigkeit und Unrichtigkeit der „Euclidischen Lehre von Verhältnissen und Propor„tionen in Hrn. Prof. Büschs Encyclopädie „der mathematischen Wissenschaften" (Hamburg. 1795. S. 51. u. Anhang) „veranlafst worden. „Hier werden die blos scheinbaren Schwierig„keiten gründlich gehoben, ohne jene Dissertation „dabei nöthig zu haben."

Die Abhandlung nr. IV. ist eine, von Pfleiderer noch im Jahre 1817. abgefafste, das V. Buch im Ganzen umfassende Bearbeitung, welche sich unter den Nachlässen Pfleiderers schon völlig in der Form ausgearbeitet vorfand, in welcher sie hier erscheint, und als Ergänzung und mehr summarische Zusammenfassung dessen, was in nr. I. u. II. enthalten war, und zugleich als Supplement von Pars II. des Aufsatzes nr. I., durch Hrn. Ephorus Hauber aus dem ihm zu Handen stehenden Nachlafs Pfleiderers für den Druck mitgetheilt worden ist.

Obgleich unverkennbar ist, dafs in diesen vier Abhandlungen manche Erläuterungen über die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen mehr als ein-



Louis Ofterdinger
im Maere 1829.

(Pfleide
OK

§. 3. **Definition III.** Zwei Gröfsen A, B heifsen zweier anderen C, D **Gleichvielfache** (*aequemultiplae*, oder *aequemultiplices*), wenn die gröfsere A die kleinere C so oftmal genau enthält, als B die D enthält; oder wenn die kleinere C genau so oftmal wiederholt werden mufs, um eine der gröfseren A gleiche Gröfse zu geben, als D wiederholt werden mufs, um eine der Gröfse B gleiche zu geben. In ebendiesem Fall nennt man auch die Gröfsen C, D **gleich-aliquote Theile** (*partes aequealiquotae*) der beiden A, B. Gleichvielfache aber von gleich-aliquoten Theilen zweier Gröfsen nennt man **gleich-aliquante Theile** (*partes aequealiquantae*) der letzteren. Gleich-aliquote Theile zweier Gröfsen nennt Euclid **den nämlichen Theil** (*eandem partem*) derselben, gleich-aliquante aber **die nämlichen Theile** (*easdem partes*).

§. 4. **Grundsatz.** Gleicher Gröfsen Gleichvielfache, und sowohl gleich-aliquote, als auch gleich-aliquante Theile sind einander gleich; ungleicher hingegen, ungleich; die der gröfseren nämlich, gröfser. Umgekehrt sind Gröfsen gleich, deren Gleichvielfache, oder gleich-aliquote, oder gleich-aliquante Theile einander gleich sind; ungleich hingegen, von welchen sie ungleich sind; namentlich ist diejenige Gröfse die gröfsere, deren Gleichvielfache, oder gleich-aliquote, oder gleich-aliquante Theile gröfser sind.

§. 5. **Satz I.** (*Eucl.* V, 1.) Wenn Gröfsen von beliebiger Anzahl A, B, C u. s. w. von ebenso vielen anderen, ihnen gleichartigen, L, M, N u. s. w., je eine der ersteren von je einer der letzteren, Gleichvielfache sind; so werden alle ersteren zusammen $A+B+C+$ u. s. w. von allen letzteren zusammen $L+M+N+$ u. s. w. ebenso vielfach seyn, wie vielfach eine der ersteren A von einer der letzteren L ist.

Kurz ausgedrückt: wenn
$$\begin{aligned} A &= rL \\ B &= rM \\ C &= rN \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$
indem r irgend eine ganze Zahl bezeichnet; so ist auch
$$\left.\begin{matrix} A+B+C+ \text{ u. s. w.} \\ \text{oder } rL+rM+rN+ \text{ u. s. w.} \end{matrix}\right\} = r(L+M+N+ \text{ u. s. w.}$$

Beweis. 1) Es besteht nämlich
A aus r gleichen Theilen, deren jeder $= L$;
B — — — — — M;
C — — — — — N;
u. s. w.

und wenn man zu jedem dieser rten Theile der Gröfse A je einer rten Theil der Gröfsen B, C u. s. w. addirt, so erhält man Summen, deren jede $=L+M+N+$ u. s. w. ist. Dieser Summen aber, welche alle zusammen die Summe der Gröfsen $A+B+C+$ u. s. w. selbst geben, lassen sich so viele machen, als jede einzelne der letzteren Gröfsen Theile hat, nämlich r. Daher ist $A+B+C+$ u. s. w. $=r(L+M+N+$ u. s. w.).

2) (*Fig.* 1.) Es seyen die Gröfsen Aa, Bb, Cc Gleichvielfache von den gleichartigen Gröfsen L, M, N, je eine von einer; das ist

es seyen in Aa ebensoviele Theile Ad, de, ea, deren jeder $=L$,
als in Bb Theile Bf, fg, gb sind, deren jed. $=M$,
und in Cc Theile Ch, hk, ko sind, deren jed. $=N$;
so werden sowohl $Ad+Bf+Ch$
als auch $de+fg+hk$ $\}=L+M+N$ seyn (B. 1, Grds. 2.),
und $ea+gb+ko$

Demnach sind in den Gröfsen Aa, Bb, Cc zusammengenommen eben so viele Gröfsen enthalten, deren jede der Summe der Gröfsen L, M, N gleich ist, als in jeder von den einzelnen Gröfsen Aa, Bb, Cc Gröfsen enthalten sind, welche beziehungsweise den einzelnen L, M, N gleich sind.

§. 6. Scholion. Auf diesem Satze, welcher schon dem gemeinen Menschenverstande leicht begreiflich ist, beruht die gewöhnliche Praxis, einen zusammengesetzten Multiplicandus mit einem einfachen Multiplicator zu multipliciren. Wenn man nämlich z. B. die Zahl 7364 mit 8 multipliciren, oder das 8fache der Zahl 7364 nehmen soll; so nimmt man 8mal zuerst die 4 Einheiten, sodenn die 6 Zehner, hierauf die 3 Hunderter und endlich die 7 Tausender, und summirt diese 8fachen.

§. 7. Satz II. (*Eucl.* V, 5.) Ebenso wenn man von zwei gleichartigen ungleichen Gröfsen L, M Gleichvielfache A, B nimmt; so ist der Ueberschufs der einen Gröfse A über die andere B so vielfach von dem Ueberschufs der Gröfse L über die andere M, wie vielfach die gröfsere A von der gröfseren L, oder die kleinere B von der kleineren M ist.

Kurz ausgedrückt: wenn $A=rL$,
und $B=rM$;
indem r wieder eine beliebige ganze Zahl bezeichnet:
so ist auch $A-B$
oder $rL-rM$ $\}=r(L-M)$.

Beweis. Es ist nämlich

$r(L-M)+rM=r(L-M+M)$ (*verm. Satz I.*),

das ist $=rL$

oder $r(L-M)+B=A$.

Folglich wird, wenn man beiderseits B hinwegnimmt,

$r(L-M)=A-B$.

(*Fig.* 2.) Oder es seyen Aa, Bb Gleichvielfache von den Gröfsn Ll, Mm; und man mache AK so vielfach von dem Ueberschufs Ol der gröfseren Ll über die kleinere Mm, wie vielfach Aa von Ll, und Bb oder AD von Mm oder LO ist. So wird $\left\{\begin{matrix}Bb\\AD\end{matrix}\right\}+AK$, das ist DK, gleichfalls so vielfach von der Summe $\left\{\begin{matrix}Mm\\LO\end{matrix}\right\}+Ol$, das ist von der Gröfse Ll seyn, wie vielfach Aa von dieser Ll ist (*Satz I.*). Daher ist $Aa=DK$ (*Grunds.* §. 4.); und daher, nach Hinwegnahme der AD zu beiden Seiten, auch $Da=AK$; das ist $Aa-Bb=rOl$ (*verm. d. Constr.*) $=r(Ll-Mm)$.

§. 8. Satz III. (*Eucl.* V, 2.) Es seyen A, B, C u. s. w. verschiedene, beliebige Vielfache der nämlichen Gröfse L; und E, F, G u. s. w. eben so viele Vielfache irgend einer andern Gröfse M, und zwar je eine von diesen gleichvielfach mit einer der ersteren, nämlich A und E, B und F, C und G u. s. w.; so sind auch die Summen $A+B+C+$ u. s. w., $E+F+G+$ u. s. w. Gleichvielfache der Gröfsen L, M.

Kurz ausgedrückt: wenn

$A=rL$, und $E=rM$,
$B=pL$, $F=pM$,
$C=qL$, $G=qM$,
u. s. w. u. s. w.

indem r, p, q beliebige ganze Zahlen bezeichnen; so ist

sowohl $A+B+C+$ u. s. w. $=(r+p+q+$ u. s. w.$)L$,

als auch $E+F+G+$ u. s. w. $=(r+p+q+$ u. s. w.$)M$.

Beweis. Es besteht nämlich die Anzahl der Theile deren jeder $=L$, welche in der Summe $A+B+C+$ u. s. w. enthalten sind, aus den Anzahlen dieser Theile zusammengenommen, welche in den einzelnen Gröfsen A, B, C u. s. w. enthalten sind. Ebenso besteht die Anzahl der Tleile deren jeder $=M$, welche in der Summe $E+F+G+$ u. s. w. enthalten sind, aus den Anzahlen dieser Theile zusammengenommen, welche in den einzelnen Gröfsen E, F, G u. s. w. enthalten sind. Da nun die Anzahlen der Theile $=L$, welche in den einzelnen Gröfsen A, B, C u. s. w. enthalten sind, beziehungsweise die nämlichen

sind (*Voraus.*), wie die Anzahlen der Theile $=M$, welche in den einzelnen Gröſsen E, F, G u. s. w. enthalten sind; so kommt auch einerlei Summe der ersteren und der letzteren Anzahlen heraus.

§. 9. Scholion. Auf dem Satze, daſs

$$rL+pL+qL+\text{u. s. w.} = (r+p+q+\text{u. s. w.})\,L,$$

beruht die gewöhnliche Praxis, eine Zahl mit einem zusammengesetzten Multiplicator zu multipliciren. Wenn man nämlich z. B. die Zahl 5728 mit 634 multipliciren soll; so nimmt man die Zahl 5728 zuerst 4 mal, sodann 30 mal und endlich 600 mal, und summirt diese Partial-Producte.

§. 10. Zusatz. (*Eucl.* V, 3.) Gleichvielfache J und K von Gleichvielfachen A und E der Gröſsen L und M sind gleichfalls von den Gröſsen L und M Gleichvielfache.

Das ist, wenn $A=rL$ und $E=rM$,

und $J=nA$ $K=nE$,

so ist sowohl $J=(nr)L$, als $K=(nr)\,M$;

indem n und r beliebige ganze Zahlen, und nr das Product bezeichnet, welches aus der Zahl r entsteht, wenn dieselbe so oftmal genommen wird, als die andere Zahl n Einheiten enthält.

Da nämlich in jeder A ebenso viele Gröſsen $=L$ enthalten sind, als in jeder E Gröſsen $=M$; so werden, wenn man beliebig viele A zusammen, und ebensoviele E zusammen, das ist Gleichvielfache von A und E nimmt, in diesen die Gröſsen L und M gleichfalls in gleicher Anzahl enthalten seyn (*Satz* III.).

Dieser Zusatz stellt eigentlich einen besonderen Fall von Satz III. dar: in welchem die Zahlen r, p, q u. s. w., und daher die Gröſsen A, B, C u. s. w., E, F, G u. s. w. beziehungsweise einander gleich sind.

§. 11. Scholion. Auf dem im vorhergehenden Zusatze enthaltenen Satze, daſs nA oder $n(rL)=(nr)L$, beruht die gewöhnliche Praxis, eine ganze Zahl mit einem Multiplicator zu multipliciren, welcher bloſs aus Zehnern oder Hundertern u. s. w. besteht. Soll man nämlich z. B. die Zahl 5728 mit 30, oder mit 600 multipliciren, so hängt man dem 3fachen, oder dem 6fachen der Zahl 5728 eine, oder zwei Nullen zur Rechten an; das ist, man verzehnfacht das Dreifache der Zahl 5728, verhundertfacht das Sechsfache derselben, und erhält so das 30fache, das 600fache der Zahl 5728. Ebenso läſst sich z. B. das 12fache einer Zahl machen, wenn man das 4fache von ihrem 3fachen oder das 3fache von ihrem 4fachen nimmt.

§. 12. Satz IV. (*Eucl.* V, 6.) Nimmt man wieder zwei beliebige verschiedene Vielfache A, B einer und derselben Gröfse L, und von irgend einer anderen Gröfse M die Gleichvielfachen E, F; so sind die Ueberschüsse der gröfseren Gleichvielfachen A und E über die kleineren B und F zugleich entweder den Gröfsen L und M gleich, oder Gleichvielfache derselben.

Kurz ausgedrückt; wenn $A=rL$, und $E=rM$
$B=pL$, und $F=pM$,
indem r, p beliebige ganze Zahlen bezeichnen, wovon die erstere r gröfser sey, als die andere p; so ist sowohl
$A-B=(r-p)L$, als auch $E-F=(r-p)M$; und namentlich
sowohl $A-B=L$, als auch $E-F=M$, wenn $r-p=1$, od. $r=p+1$.

Beweis. Wenn nämlich 1) $r=p+1$, oder $r-p=1$; so ist (§. 8.) sowohl
$L+pL=(1+p)L$ oder rL, als auch $M+pM=(1-p)M$ oder rM,
das ist, sowohl
$L+B=A$, als auch $M+F=E$;
folglich sowohl
$L=A-B$, als auch $M=E-F$.

2) Wenn $r=p+n$, oder $r-p=n$, indem n irgend eine ganze Zahl bezeichnet; so ist wieder (§. 8.) sowohl
$nL+pL=(n+p)L$ oder rL, als $nM+pM=(n+p)M$ oder rM,
das ist, sowohl
$nL+B=A$, als $nM+F=E$;
folglich sowohl
$nL=A-B$, als auch $nM=E-F$.
oder $(r-p)L=A-B$, oder $(r-p)M=E-F$.

(*Fig.* 3. 4.) Oder es seyen Aa und Ee, Bb und Ff beziehungsweise Gleichvielfache der Gröfsen L und M. Wenn alsdann

1) (*Fig.* 3.) $Da=Aa-Bb=L$ ist; so mache man $EK=M$. Da nun $\left\{\begin{matrix}Bb\\AD\end{matrix}\right\}$ und $\left\{\begin{matrix}Ff\\EG\end{matrix}\right\}$ Gleichvielfache (*Voraus.*) der Gröfsen L und M sind; so werden auch $AD+\left\{\begin{matrix}L\\Da\end{matrix}\right\}$ und $EG+\left\{\begin{matrix}M\\EK\end{matrix}\right\}$, das ist Aa und GK Gleichvielfache der Gröfsen L und M seyn (*Satz* III.). Nun ist aber (*Voraus.*) Ee so vielfach von der Gröfse M, wie vielfach Aa von L ist. Daher sind Ee und GK Gleichvielfache von der nämlichen Gröfse M, beide nämlich so vielfach von derselben, als Aa von L. Folglich ist $Ee=GK$ (§. 4.). Demnach ist, wenn man die gemeinschaftliche EG wegnimmt, auch Ge oder $Ee-Ff=\left\{\begin{matrix}EK\\M\end{matrix}\right\}$.

2) (*Fig.* 4.) Wenn *Da* irgend ein Vielfaches der Gröfse *L* ist; so mache man *EK* gleichvielfach von der Gröfse *M*. Da nun $\left\{\begin{matrix}Bb\\AD\end{matrix}\right\}$ und $\left\{\begin{matrix}Ff\\EG\end{matrix}\right\}$ (*Voraus.*) Gleichvielfache der Gröfsen *L* und *M*, und auch (*Constr.*) *Da* und *EK* Gleichvielfache von ebendiesen Gröfsen sind; so sind auch *Aa* und *GK* von ebendiesen *L* und *M* Gleichvielfache (*S.* III.). Daher sind wiederum *Ee* und *GK* Gleichvielfache von der nämlichen Gröfse *M*, beide nämlich so vielfach von derselben, als *Aa* von der Gröfse *L*. Daher ist *Ee*=*GK* (*Grunds.* §. 4.); und wenn man die gemeinschaftliche *GE* hinwegnimmt, auch $\left\{\begin{matrix}\text{oder}\\\end{matrix}\begin{matrix}Ge\\Ee-Ff\end{matrix}\right\}$ = *EK*, das ist, so vielfach von der Gröfse *M*, als $\left\{\begin{matrix}\text{oder}\\\end{matrix}\begin{matrix}Da\\Aa-B.\end{matrix}\right\}$ von *L*.

§. 13. Definition IV. Unter Verhältnifs zweier Gröfsen, in der allgemeinsten Bedeutung genommen, versteht man irgend eine, aus Vergleichung derselben mit einander hervorgehende Art, die eine derselben aus der anderen zu bestimmen oder herzuleiten: und so läfst sich der Begriff von Verhältnifs auf jede zwei gleichartige Gröfsen, z. B. auf jede zwei Linien, jede zwei Flächen jede zwei körperlichen Räume; nicht aber weiter, nämlich auf zwei heterogene oder verschiedenartige Gröfsen ausdehnen. Es lassen sich aber unendlich viele verschiedene Arten denken, die eine von zwei Gröfsen durch die andere zu bestimmen. Die einfachsten unter denselben sind diejenigen, wobei man die Gröfsen selbst unmittelbar, ohne alle vorhergehende Veränderung derselben, mit einander vergleicht, und die eine durch die andere bestimmt, indem man angibt: entweder, um wie viel die eine die andere übertreffe, oder von ihr übertroffen werde; oder wie vielmal die eine die andere enthalte, oder in ihr enthalten sey. Die letztere Art, Gröfsen mit einander zu vergleichen, und die eine durch die andere zu bestimmen, behandelt Euclid ausführlich in B. V., und wendet dieselbe in den folgenden Büchern auf Gegenstände der Geometrie an; während er der ersteren nirgends ausdrücklich erwähnt. Aus diesem Umstande ist denn wahrscheinlich die Gewohnheit entstanden, die Verhältnisse dieser letzteren Art geometrische, und dagegen die der ersteren Art, welche es mit dem Ueberschufs der einen Gröfse über die andere, oder mit dem Minderbetrag der einen Gröfse gegen die andere zu thun haben, und den Gegenstand der ersten einfachsten Operationen der

Arithmetik, der Addition und Subtraction ausmachen, arithmetische Verhältnisse zu nennen. Uebrigens gehört keines dieser Verhältnisse der Arithmetik oder der Geometrie vorzugsweise an, sondern beide finden auf gleiche Weise bei Zahlen, wie bei ausgedehnten Gröfsen statt; und beide zusammen bezeichnen ungefähr die Gränzen der sogenannten Elementar-Mathematik. Eine allgemeine Theorie dieser und der übrigen Verhältnisse aber gehört zunächst einer eigenen Untersuchung über Gröfsen im Allgemeinen an, welche der Untersuchung über Zahlen und ausgedehnte Gröfsen ins Besondere vorausgeschickt werden sollte; wenn nicht mit Recht zu befürchten wäre, dafs dergleichen abstracte Betrachtungen diejenigen, welche sich diesen Studien widmen wollen, gleich im Anfang zurückschrecken möchten.

§. 14. Demnach betrifft sowohl der Gegenstand, als auch namentlich die vierte Definition des V. Buches der Elemente blofs die sogenannten geometrischen Verhältnisse; und diese werden auch hier künftig verstanden, wo von Verhältnissen schlechtweg die Rede ist. Gewöhnlich erklärt man, wie schon §. 13. gesagt wurde, diese Verhältnisse so, dafs man sagt, es werde in denselben untersucht, wie oft die eine Gröfse die andere enthalte, oder in ihr enthalten sey. Da nun aber eine jede beliebige Gröfse nicht eine jede andere beliebige kleinere von derselben Art, z. B. jede beliebige Linie jede andere kleinere, zu ganzen malen enthält; so läfst man, um den Begriff von geometrischem Verhältnifs nicht auf einen engeren Kreis von Gegenständen, als den Begriff von Verhältnifs überhaupt (§. 13.), zu beschränken, auch gebrochene Zahlen bei demselben gelten, obgleich alsdann die gröfsere Gröfse wirklich nicht die kleinere selbst, sondern blofs einen aliquoten Theil derselben etlichemal enthält. Oder, um die Sache mehr im Geiste Euclids auszudrücken, das (geometrische) Verhältnifs zweier Gröfsen beruht nicht blofs auf der Untersuchung: welches Vielfache der kleineren Gröfse der gröfseren Gröfse selbst gleich sey? sondern noch allgemeiner auf der Bestimmung: welche Vielfache zweier Gröfsen einander gleich seyen? Daher sagt man z. B. es finde zwischen zwei Gröfsen ein (geometrisches) Verhältnifs statt: sowohl wenn die gröfsere Gröfse die kleinere zmal; als auch wenn sie dieselbe $\frac{3}{4}$ mal ent-

hält; das ist, sowohl wenn gefunden und ausgesagt werden kann, dafs die gröfsere dem Doppelten der kleineren, als auch, dafs sie dreien Halbtheilen derselben gleich sey. Im letzteren Fall aber wird das Doppelte der gröfseren dem Dreifachen der kleineren gleich seyn.

Das erste Glied eines Verhältnisses nennt man sein Vorderglied (*terminus antecedens*); das zweite sein Hinterglied (*terminus consequens*); und die ganze Zahl, oder den Bruch, und zwar ächten oder unächten, wodurch angezeigt wird, wie vielmal das Hinterglied in dem Vordergliede enthalten sey, den Exponenten des Verhältnisses (*exponens rationis*).

§. 15. Indessen läfst sich der Begriff von geometrischem Verhältnifs, auf die (§. 14.) angegebene Art erweitert, noch nicht auf jede zwei Gröfsen von einerlei Art, z. B. auf jede zwei Linien ausdehnen. Es kommen nämlich Gröfsen von einerlei Art, z. B. Linien vor, von welchen die gröfsere weder die kleinere selbst, noch irgend einen aliquoten Theil derselben genau etlichemal enthält; oder von welchen weder die gröfsere selbst, noch irgend ein Vielfaches derselben irgend einem Vielfachen der kleineren gleich ist. Solche Gröfsen nennt man, da sie kein gemeinschaftliches Mafs haben, incommensurable Gröfsen. Von dieser Art sind, wie Euclid in X, 117. XIII, 6. 11. zeigt, die Seite und die Diagonale eines jeden Quadrates, die Theile einer nach mittlerem und äufserem Verhältnifs getheilten geraden Linie, die Seite eines regelmäfsigen Fünfecks und der Durchmesser des um dasselbe beschriebenen Kreises. Der Exponent eines Verhältnisses von zwei Gröfsen dieser Art läfst sich daher nicht genau in Zahlen angeben, weswegen dieselben auch irrationale Gröfsen genannt werden; doch lassen sich Grenzen dieses Exponenten bestimmen, welche von einander um weniger, als irgend eine gegebene Bruch-Zahl unterschieden sind; oder es lassen sich zwei unmittelbar auf einander folgende Vielfache der einen Gröfse angeben, welche die Grenzen für irgend ein gegebenes Vielfaches der andern Gröfse sind; das ist, von welchen das eine kleiner, das andere gröfser als dieses gegebene Vielfache ist. So z. B. wenn das Quadrat der Diagonale eines Quadrates das Doppelte von dem Quadrate selbst, oder von dem Quadrate der Seite desselben ist; oder wenn das Quadrat der Diagonale gleich ist $\frac{200}{100}$, $\frac{20000}{10000}$, $\frac{2000000}{1000000}$,

$\frac{200000000}{100000000}$, u. s. w. von dem Quadrate der Seite; so ist die Diagonale selbst

$$\left.\begin{array}{l} > \frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \frac{14142}{10000} \text{ u. s. w.} \\ < \frac{15}{10}, \frac{142}{100}, \frac{1415}{1000}, \frac{14143}{10000} \text{ u. s. w.} \end{array}\right\} \text{von der Seite,}$$

oder

das	10fache	der Diag.	ist	> das	14fache	u. < das	15fache		der Seite
das	100fache	—	—	> das	141fache	u. < das	142fache		
das	1000fache	—	—	> das	1414fache	u. < das	1415fache		
das	10000fache	—	—	> das	14142fache	u. < das	14143fache		

u. s. w.

Um nun, wie es die gewöhnliche Bedeutung des Wortes erfordert, auch Gröfsen dieser Art unter den Begriff von Verhältnifs zu fassen, und das, was er im Folgenden beweist, vollkommen allgemein zu machen, setzt Euclid, mit Uebergehung der Gleichheit der Vielfachen, seine Definition in das, allen Gröfsen von einerlei Art gemeinschaftliche Merkmal: dafs irgend ein Vielfaches der einen Gröfse ein Vielfaches der anderen übertreffen könne. Und dieses Merkmal begreift denn auch diejenigen Fälle, da einem Vielfachen der einen Gröfse *B* entweder die andere mit ihr commensurable *A* selbst, oder irgend ein Vielfaches der letzteren, gleich ist. Denn alsdann ist, im ersteren Fall das Doppelte der Gröfse *A*, im letzteren das nächst höhere Vielfache derselben, gröfser als das gegebene Vielfache der Gröfse *B*. Im Allgemeinen aber postulirt Euclid im Anfang des X. Buches, wo er von den incommensurabeln Gröfsen insbesondere handelt, die Möglichkeit dieser Eigenschaft gleichartiger Gröfsen, dafs nämlich irgend eine beliebige gegebene Gröfse so oft vervielfacht werden könne, bis sie irgend eine andere gegebene Gröfse der nämlichen Art übertrifft.

§. 16. Uebrigens erklärt die 4te Definition des V. Buches, von welcher hier die Rede ist, und in welcher gesagt wird, dafs Gröfsen zu einander ein Verhältnifs haben, welche vervielfacht einander übertreffen können, nicht sowohl den Begriff von geometrischem Verhältnifs selbst, sondern sie gibt vielmehr das unterscheidende Merkmal der Gröfsen an, welche man homogene nennt, und welche die Glieder eines Verhältnisses bilden können; jedoch so, dafs sie zugleich andeutet, was bei denselben hauptsächlich zu betrachten sey, wenn von ihrem geometrischen Verhältnifs die Rede

ist. Eine genauere Entwicklung des Begriffes behielt er für die Definitionen von Gleichheit und Ungleichheit der (geometrischen) Verhältnisse bevor. Diese (Gleichheit und Ungleichheit der Verhältnisse) macht nun den eigentlichen Gegenstand der nachfolgenden Untersuchung aus; daher es eigends erforderlich war, die Begriffe derselben deutlich zu erklären und ihre Merkmale genau zu bestimmen.

Es folgt zwar aus dem oben (§. 14. 15.) Gesagten, dafs sich das geometrische Verhältnifs zweier Gröfsen durch Bestimmung des Exponenten, oder der Grenzen desselben angeben lasse; und unstreitig mufs auch auf diese Art dasselbe aufgefassen, welche durch den gewöhnlich angenommenen Sinn und Sprachgebrauch unmittelbar dargeboten ist, die Theorie dieser Veshältnisse selbst, und die genaue Bestimmung der Bedeutungen der dieselben betreffenden Ausdrücke gebaut und damit in Uebereinstimmung gebracht werden. Indessen ist diese, auf Zahlen beschränkte Art, das geometrische Verhältnifs zweier Gröfsen auszudrücken, weder die einzige, noch, wenn von incommensurabeln Gröfsen die Rede ist, die passendste. Woraus denn erhellen mag, warum Euclid sich enthalten habe, eine Definition von geometrischem Verhältnifs selbst aufzustellen.

Um somehr läfst sich mit Rob. Simson (in den seiner englischen Uebersetzung beigefügten Noten p. 305. *)) vermuthen, dafs die dritte Definition von Verhältnifs überhaupt, nicht ächt, sondern von Theon oder einem anderen Commentator eingeschoben sey: da Euclid dieselbe in dem Folgenden nirgends gebraucht, und auch wegen des unbestimmten Begriffes, den sie enthält, nicht gebrauchen konnte.

§. 17. Definition V. Man sagt gewöhnlich, Gröfsen A, B, C, D seyen in einerlei (geometrischem) Verhältnifs, oder (geometrisch) proportionirt: wenn die erste A so oftmal die zweite B enthält, als die dritte C die vierte D enthält; wobei sowohl ganze, als auch beliebige gebrochene Exponenten gelten: oder wenn die erste A und die dritte C, oder Gleichvielfache derselben, zugleich, Gleichvielfachen der zweiten B und der vierten D, oder den Gröfsen B und D selbst, gleich sind; z. B. wenn die erste A die zweite B 2mal, oder

*) *Matthias Ausz, aus Rob. Simson p. 38. fg.*

$\frac{5}{3}$mal, oder $\frac{1}{6}$mal, oder $\frac{4}{7}$mal, und ebenso die dritte C die vierte D 2mal, oder $\frac{5}{3}$mal, oder $\frac{1}{6}$mal, oder $\frac{4}{7}$mal, enthält; das ist, wenn die erste A dem Doppelten der zweiten B, und ebenso die dritte C dem Doppelten der vierten D; oder wenn das 3fache der ersten A dem 5fachen der zweiten B, und ebenso das 3fache der dritten C dem 5fachen der vierten D; oder wenn das 6fache der ersten A der zweiten B, und ebenso das 6fache der dritten C der vierten D; oder wenn das 7fache der ersten A dem 4fachen der zweiten B, und ebenso das 7fache der dritten C dem 4fachen der vierten D, gleich ist.

Umgekehrt, wenn man sagt, dafs vier Gröfsen A, B, C, D (geometrisch) proportionirt, oder in einerlei Verhältnifs seyen; so versteht man darunter, vermöge des gewöhnlichen Begriffes von geometrischem Verhältnifs, dafs die erste A die zweite B so oftmal enthalte, als die dritte C die vierte D enthält; oder dafs die erste A und die dritte C, oder Gleichvielfache derselben, zugleich, Gleichvielfachen der zweiten B und der vierten D, oder der zweiten B und der vierten D selbst, gleich seyen.

Die Gleichheit zweier (geometrischen) Verhältnisse wird kurz in die Gleichheit ihrer Exponenten gesetzt. Und so sagt auch Euclid (B. VII. Def. 20.), dafs (ganze) Zahlen proportionirt seyen, wenn die erste von der zweiten, und die dritte von der vierten gleichvielfach, oder der nämliche Theil, oder die nämlichen Theile sind.

§. 18. Um aber den Begriff von Gleichheit des (geometrischen) Verhältnisses, oder von (geometrischer) Proportion auch auf incommensurable Gröfsen auszudehnen, mufs man zu der Gleichheit der Exponenten der Verhältnisse noch die Gleichheit, und zwar durchgängige, der Grenzen, innerhalb welcher die Exponenten derselben enthalten sind, hinzusetzen. Denn man wird von Gröfsen A, B, C, D nicht sagen können, dafs sie in einerlei Verhältnifs seyen, wenn zwar sowohl die erste A z. B. $> \frac{25}{7} B$ und $< \frac{26}{7} B$, als auch die dritte $C > \frac{25}{7} D$ und $< \frac{26}{7} D$; dagegen, während die erste $A > \frac{127}{35} B$ und $< \frac{128}{35} B$, die dritte C nur $> \frac{126}{35} D$ und

$< \frac{127}{35}D$, oder die dritte C noch $> \frac{128}{35}D$ und erst $< \frac{129}{35}D$ ist; sondern die Gleichheit der Verhältnisse A zu B, C zu D, erfordert, dafs auch C gleichfalls $> \frac{127}{35}D$ und $< \frac{128}{35}D$ sey; und so weiter, dafs die Grenzen der Exponenten beider Verhältnisse, man mag aliquote Theile der Gröfsen B und D annehmen, welche man will, beständig die nämlichen bleiben; kurz, dafs, man mag den Zeichen n und r ganze Zahlen substituiren, welche man will: wenn $A > \frac{r}{n}B$ und $< \frac{r+1}{n}B$, immer zugleich auch $C > \frac{r}{n}D$ und $< \frac{r+1}{n}D$ sey; und so auch, wenn $A > \frac{1}{n}B$ und $< \frac{2}{n}B$, zugleich auch $C > \frac{1}{n}D$ und $< \frac{2}{n}D$ sey; und nicht minder, wenn schlechthin $A < \frac{1}{n}B$, zugleich auch $C < \frac{1}{n}D$ sey; so, dafs weder die Einheit noch die die Null von den Werthen des Zeichens r ausgeschlossen wird.

Dieſs läſst sich auch auf andere Weise so darthun. Wenn incommensurable Gröfsen A, B, C, D in einerlei Verhältnifs seyn sollen, so ist nicht hinreichend, dafs z. B das 7fache der ersten $A >$ das 23fache und $<$ das 26fache der zweiten B, und ebenso das 7fache der dritten $C >$ das 25fache und $<$ das 26fache der vierten D sey; sodenn aber, während das 35fache der ersten $A >$ das 127fache und $<$ das 128fache der zweiten B ist, das 35fache der dritten C entweder $>$ das 128fache und erst $<$ das 129fache, oder nur $>$ das 126fache und schon $<$ das 127fache der vierten D sey; sondern es wird erfordert, dafs auch jetzt noch zugleich das 35fache der dritten $C >$ das 127fache und $<$ das 128fache der vierten D sey; und dafs allgemein, man mag den Zeichen n und r Zahlen substituiren, welche man will, zugleich sowohl das $n$fache der ersten $A >$ das $r$fache und $<$ das $(r+1)$fache der zweiten B, als auch das $n$fache der dritten $C >$ das $r$fache und $<$ das $(r+1)$fache der vierten D sey; und dafs auch, wenn das $n$fache der ersten A nur $>$ das einfache und $<$ das zweifache der zweiten B ist, ebenso das $n$fache der dritten $C >$ das einfache und $<$ das zweifache der vierten D sey; und

auch, wenn das $n$fache der ersten $<$ die zweite B selbst, zugleich auch das $n$fache der dritten $C<$ die vierte D selbst sey.

§. 14. Man wird daher allgemein sagen können, dafs vier Gröfsen A, B, C, D in einerlei (geometrischem) Verhältnifs, oder (geometrisch) proportionirt seyen: wenn beide Verhältnisse einerlei Exponenten haben, oder wenn die Exponenten beider Verhältnisse A zu B und C zu D beständig innerhalb derselben Grenzen enthalten sind, auf welche aliquoten Theile der Gröfsen B und D man sie auch beziehen möge; oder wenn beliebige Gleichvielfache der ersten A und der dritten C zugleich entweder gleich, oder gröfser, oder kleiner als beliebige Gleichvielfache der zweiten B und der vierten D sind; und umgekehrt.

Die letztere Art, das unterscheidende Merkmal der Gleichheit zweier Verhältnisse auszudrücken, bezeichnet zwar nicht ausdrücklich den Fall, wenn der Exponent beider Verhältnisse einerlei ganze Zahl ist, oder wenn die erste A und die dritte C selbst Gleichvielfachen der zweiten B und der vierten D gleich sind; schliefst denselben jedoch nicht aus, sondern fafst ihn stillschweigend in sich; da alsdann jede beliebigen Gleichvielfachen der ersten A und der dritten C nothwendig zugleich gröfser sind, als jene Gleichvielfachen der zweiten B und der vierten D. Das nämliche gilt auch von dem Fall, wenn der Exponent beider Verhältnisse ein Bruch ist, welcher die Einheit zum Zähler hat, oder wenn Gleichvielfache der ersten A und der dritten C zugleich den Gröfsen B und D selbst gleich sind; denn alsdann sind jene Gleichvielfachen der ersten A und der dritten C zugleich kleiner als jede beliebigen Gleichvielfachen der zweiten B und der vierten D. Ebenso wenn die Glieder der Verhältnisse unter sich incommensurabel sind; so erfordert die Einerleiheit der Grenzen ihres Exponenten für beliebige gleich-aliquote Theile der zweiten B und der vierten D blos das, dafs beliebige Gleichvielfache der ersten A und der dritten C zugleich gröfser, als gewifse Gleichvielfache der zweiten B und der vierten D, und kleiner als die nächsthöheren Gleichvielfachen derselben seyen: indem hierin auch die besonderen Bedingungen mit eingeschlossen sind, dafs Gleichvielfache der ersten A und der dritten C zugleich nur gröfser als die Gröfsen B und D selbst, kleiner aber als das Doppelte derselben seyen; und eben-

so auch, dafs Gleichvielfache der ersten *A* und der dritten *C* zugleich kleiner seyen, als die Gröfsen *B* und *D* selbst. Alle diese Erfordernisse sind zwar unstreitig in der unbestimmten Erwähnung von Gleichvielfachen sowohl der zweiten *B* und der vierten *D*, als auch der ersten *A* und der dritten *C* begriffen; dagegen liegt in derselben auf diese Art wiederum mehr, als zunächst hinreichend und nöthig war. Mit Vorbedacht hat aber Euclid seine Definition so gestellt, dafs er sowohl bei dem Ausdruck, als auch besonders bei Anwendung derselben der besonderen Aufzählung nicht nur der drei Hauptfälle, welche statt finden, wenn man auf die Exponenten sieht, sondern auch der besondern Fälle, welche die incommensurabeln Gröfsen darbieten, überhoben war, und die Beweise, ihrer Strenge unbeschadet, kürzer und bündiger machen konnte. (Vgl. auch Montucla *Hist. des Math. Nouv. Ed.* Paris An. VII. Tom. I. p. 210. fg. A. d. U.)

Um dieſs sogleich an Beispielen, welche das bisher Gesagte durch die Anwendung selbst erläutern, deutlich zu machen; so wollen wir, ehe wir zu der Entwicklung des Begriffes von Ungleichheit der Verhältnisse weiter schreiten, zuerst einen besondern Satz, welcher der erste vom VIten Buche der Elemente ist, aus den beiden oben angegebenen Merkmalen der Gleichheit der Verhältnisse beweisen; und hierauf unmittelbar die allgemeinen Sätze des V. Buches der Elemente folgen lassen, welche die Sätze von den einander gleichen Verhältnissen betreffen, und deren directen Beweise den Begriff von Ungleichheit der Verhältnisse nicht voraussetzen.

§. 20. Satz V. (*Eucl.* VI, 1.) Parallelogramme oder Dreiecke von einerlei oder gleichen Höhen, oder welche zwischen einerlei Parallelen stehen, verhalten sich wie ihre Grundlinien.

Der Beweis beruht im Allgemeinen auf den Sätzen 36. u. 38. des I. Buches und ihren Zusätzen: worin gezeigt wird, dafs Parallelogramme und Dreiecke von einerlei oder gleicher Höhe, oder zwischen einerlei Parallelen, welche auf gleichen Grundlinien stehen, gleich; die aber auf ungleichen Grundlinien stehen, ungleich sind; namentlich das auf der gröfseren Grundlinie stehende das gröfsere ist.

Wenn demnach

1) die Grundlinien (*Fig.* 5. 6.) *AB*, *EF* commensurabel sind, und die gröfsere *AB* die kleinere *EF* selbst genau

einigemal enthält; und man theilt die gröſsere AB in Theile AJ, JK, KL, LB, deren jeder der kleineren EF gleich ist, und zieht durch die Theilungspunkte J, K, L gerade Linien, und zwar in dem Parallelogramme $ABCD$ parallel mit den Seiten AD, BC, in dem Dreiecke ABC hingegen an die Spitze C; so wird dadurch das $\left\{\begin{matrix}\text{Parallelogramm } ABCD\\ \text{Dreieck } ABC\end{matrix}\right\}$ in ebensoviele $\left\{\begin{matrix}\text{Parallelogramme}\\ \text{Dreiecke}\end{matrix}\right\}$ getheilt, deren jedes dem $\left\{\begin{matrix}\text{Parallelogramme } EFGH\\ \text{Dreieck } EFG\end{matrix}\right\}$ vermöge I, 36. 38. gleich ist, als die Grundlinie AB Theile gleich der Grundlinie EF enthält. Daher verhält sich in diesem Fall (§. 17.)

sowohl das Parallgr. $ABCD$: Parallgr. $EFGH$
als auch das Dreieck ABC : Dreieck EFG $\Big\}$ $= AB : EF$.

Denn wenn allgemein die Grundlinie AB aus r Theilen besteht, deren jeder $= EF$, so besteht auch das $\left\{\begin{matrix}\text{Parallelogramm } ABCD\\ \text{Dreieck } ABC\end{matrix}\right\}$ aus r Theilen, deren jeder $=$ dem $\left\{\begin{matrix}\text{Parallelogramm } EFGH\\ \text{Dreieck } EFG\end{matrix}\right\}$; indem r eine beliebige ganze Zahl bezeichnet.

2) Wenn (*Fig.* 7. 8.) von den ebenfalls commensurabeln Grundlinien, die gröſsere AB die kleinere EF nicht selbst, sondern irgend einen aliquoten Theil EN derselben genau etlichemal enthält; und man theilt beide Grundlinien AB, EF in Theile, deren jeder $= EN$, und zieht durch die Theilungspunkte gerade Linien, und zwar in den Parallelogrammen $ACBD$, $EFGH$ parallel mit deren Seiten AB und CD, EH und FG; in den Dreiecken ABC, EFG hingegen an die Spitzen C, G derselben: so werden dadurch die $\left\{\begin{matrix}\text{Parallelogramme } ABCD,\ EFGH\\ \text{Dreiecke } ABC,\ EFG\end{matrix}\right\}$ beziehungsweise in eben so viele $\left\{\begin{matrix}\text{Parallelogramme}\\ \text{Dreiecke}\end{matrix}\right\}$ getheilt, deren jedes, vermöge I, 36. 38. $=$ dem $\left\{\begin{matrix}\text{Parallelogramme } ENMH\\ \text{Dreiecke } ENG\end{matrix}\right\}$, als die Grundlinien AB, EF Theile $= EN$ enthalten. Wenn daher allgemein die Grundlinie EF, n Theile $= EN$, und die Grundlinie AB, r Theile $=$ ebendieser EN enthält, indem n und r beliebige verschiedene ganze Zahlen bezeichnen, wovon r die gröſsere ist; das ist, wenn EN der $n$te Theil der Grundlinie EF, und $AB = \frac{r}{n} EF$ ist: so besteht auch das

$\left\{\begin{matrix}\text{Parallgr. } EFGH \\ \text{Dreieck } EFG\end{matrix}\right\}$ aus n Theilen und das $\left\{\begin{matrix}\text{Parallgr. } ABCD \\ \text{Dreieck } ABC\end{matrix}\right\}$ aus r Theilen, deren jeder $=$ dem $\left\{\begin{matrix}\text{Parallgr. } ENMH \\ \text{Dreieck } ENG\end{matrix}\right\}$, oder das $\left\{\begin{matrix}\text{Parallgr. } ENMH \\ \text{Dreieck } ENG\end{matrix}\right\}$ ist der $n$te Theil des $\left\{\begin{matrix}\text{Parallelogramms } EFGH \\ \text{Dreiecks } EFG\end{matrix}\right\}$, und das Parallelogramm $ABCD = \frac{r}{n} EFGH$, und ebenso das Dreieck $ABC = \frac{r}{n} EFG$.

Wornach wieder (§. 17.)

sowohl das Parallgr. $ABCD : EFGH$ als auch das Dreieck $ABC : EFG$ $\left\{\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right\} = AB : EF$.

3) Wenn (*Fig.* 9. 10.) die Grundlinien AB, EF incommensurabel sind, namentlich, wenn irgend ein beliebig angenommener aliquoter Theil EN der kleineren EF, wiederholt genommen, nie die gröfsere AB genau gibt, sondern wenn EN etlichemal wiederholt eine Linie AR macht, welche zunächst $< AB$, hingegen noch einmal weiter genommen, nunmehr immer eine Linie $AS > AB$ macht, so dafs, wenn die Grundlinie EF n Theile, die Linie AR aber r Theile enthält, deren jeder $= EN$; demnach EN der $n$te Theil der Grundlinie EF, und $AR = \frac{r}{n} EF$, $AS = \frac{r+1}{n} EF$, dagegen $AB > \frac{r}{n} EF$ und $< \frac{r+1}{n} EF$ ist; indem r und n beliebige ganze Zahlen bezeichnen: und man zieht durch die Punkte R und S in *Fig.* 9. Parallelen mit den Seiten AD, BC des Parallelogrammes, in *Fig.* 10. aber gerade Linien an die Spitze C des Dreiecks: so läfst sich auf dieselbe Art, wie im zweiten Fall, beweisen, dafs das Parallogramm $ARPD = \frac{r}{n} EFGH$, und das Parallelogramm $ASOD = \frac{r+1}{n} EFGH$, und ebenso das Dreieck $ARC = \frac{r}{n} EFG$, und das Dreieck $ASC = \frac{r+1}{n} EFG$ sey; und demnach

sowohl das Parallelogr. $ABCD > \frac{r}{n} EFGH$, hingeg. $< \frac{r+1}{n} EFGH$,

als auch das Dreieck $ABC > \frac{r}{n} EFG$, hingeg. $< \frac{r+1}{n} EFG$.

Daher verhält sich auch in diesem Fall (§. 18.)

sowohl das Parallelogr. $ABCD : EFGH$ als auch das Dreieck $ABC : EFG$ $\left\{\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right\} =$ die Grundlinie $AB : EF$.

Auf ähnliche Art wird der Satz bewiesen, wenn die Grundlinie $AB < EF$ ist; oder wenn $AB > EF$ bleibt, so läfst sich auf ähnliche Weise zeigen, dafs

sowohl Parallelogr. $EFGH : ABCD$ } $= EF : AB$ sey.
als auch Dreieck $EFG : ABC$ }

§. 21. (*Fig.* 11, 12.) Der Euclidischen Definition gemäfs wird der Beweis eben dieses V. Satzes folgendermafsen geführt. Nimmt man beliebige Vielfache AL, EM der Grundlinien AB, EF, und zieht durch die Punkte L, M entweder Parallelen mit den Seiten AD und BC, EH und FG der Parallelogramme, welche den verlängerten DC, HG in den Punkten K, J begegnen, oder gerade Linien an die Spitzen C, G der Dreiecke: so folgt aus I, 36. 38. auf dieselbe Art, wie im ersten Fall von §. 20., dafs das $\left\{\begin{matrix}\text{Parllgr. } ALKD \\ \text{Dreieck } ALC\end{matrix}\right\}$ von dem $\left\{\begin{matrix}\text{Parllgr. } ABCD \\ \text{Dreieck } ABC\end{matrix}\right\}$ so vielfach sey, als AL von der Grundlinie AB; und dafs ebenso das $\left\{\begin{matrix}\text{Parallgr. } EMJH \\ \text{Dreieck } EMG\end{matrix}\right\}$ von dem $\left\{\begin{matrix}\text{Parallgr. } EFGH \\ \text{Dreieck } EFG\end{matrix}\right\}$ so vielfach sey, als EM von der Grundlinie EF. Nun ist vermöge I, 36. 38. und Zus.

$$\left\{\begin{matrix}\text{sowohl das Parallogr. } ALKD \\ \text{als auch das Dreieck } ALC\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}< \\ = \\ >\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}\text{das Parallgr. } EMJH \\ \text{das Dreieck } EMG\end{matrix}\right\},$$

je nachdem $AL \left\{\begin{matrix}< \\ = \\ >\end{matrix}\right\} EM$ ist. Da nun, wenn man von den ersten $\left\{\begin{matrix}ABCD \\ ABC\end{matrix}\right\}$ und der dritten AB Gleichvielfache, $\left\{\begin{matrix}ALKD \\ ALC\end{matrix}\right\}$ und AL, und von den zweiten $\left\{\begin{matrix}EFGH \\ EFG\end{matrix}\right\}$ und der vierten EF Gleichvielfache $\left\{\begin{matrix}EMJH \\ EMG\end{matrix}\right\}$ und EM nimmt, die Vielfachen $\left\{\begin{matrix}ALKD, & EMJH \\ ALC, & EMG\end{matrix}\right\}$ der ersten und der zweiten $\left\{\begin{matrix}ABCD, & EFGH \\ ABC, & EFG\end{matrix}\right\}$, und die Vielfachen AL, EM der dritten und der vierten AB, EF paarweise, bei jeder Vervielfachung, immer zugleich entweder einander gleich, oder die einen zugleich gröfser, oder zugleich kleiner als die andern sind: so folgt (aus §. 19.) dafs

sowohl das Parallogr. $ABCD : EFGH$ } $= AB : EF$ sey.
als auch das Dreieck $ABC : EFG$ }

§. 22. Scholion 1. Auf dieselbe Art kann aus den Sätzen III, 26. 27. und deren Zusätzen, in welchen

bewiesen wird, dafs in einerlei oder gleichen Kreisen sowohl die Winkel am Mittelpunkte als auch die Winkel am Umkreise, welche auf gleichen Bogen stehen, beziehungsweise einander gleich, die aber auf ungleichen Bogen stehen, ungleich, nämlich die auf dem gröfseren Bogen stehenden die gröfseren seyen; und umgekehrt; der Satz VI, 33. hergeleitet werden: dafs in einerlei oder gleichen Kreisen die Winkel, sowohl am Mittelpunkte als auch am Umkreise, sich zu einander wie die Bogen verhalten, auf welchen sie stehen.

§. 23. Scholion 2. Auch läfst sich auf die nämlichen Arten allgemein beweisen: wenn Gröfsen einer Art von Gröfsen einer anderen Art so abhängen, dafs die, gleichen Gröfsen der letzteren Art entsprechenden Gröfsen der ersteren Art ebenfalls gleich; die ungleichen entsprechenden aber, ungleich, und zwar die den gröfseren entsprechenden, gröfser sind (wie z. B. die Flächenräume gleich-hoher Parallelogramme und Dreiecke von der Gröfse der Grundlinien, die Winkel sowohl am Mittelpunkte als auch am Umkreise in einerlei oder gleichen Kreisen von den Bogen, auf welchen sie stehen, abhängen); und es sind A, B zwei Gröfsen der ersteren Art, welche zweien Gröfsen C, D der letzteren Art entsprechen: so werde immer $A : B = C : D$ seyn.

Denn da (um blos die letztere Beweisart ausdrücklich zu wiederholen) den Gröfsen der zweiten Art, welche der Gröfse C gleich sind, die der Gröfse A gleichen Gröfsen der ersten Art entsprechen (Vorauss.): so wird die der Gröfse $2C$ der zweiten Art entsprechende Gröfse der ersteren Art, $= 2A$; die der Gröfse $3C$ entsprechende, $= 3A$; und allgemein die der Gröfse nC entsprechende, $= nA$ seyn. Ebenso wird die der Gröfse rD der letztern Art entsprechende Gröfse der ersteren Art $= rB$ seyn; indem r und n beliebige ganze Zahlen bezeichnen. Nun sind die Gröfsen der ersteren Art, welche Gröfsen der letzteren Art entsprechen, zugleich mit diesen, entweder einander gleich, oder die einen zugleich gröfser, oder zugleich kleiner, als die anderen (Vorauss.). Daher ist, wenn $nC \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} rD$, auch $nA \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} rB$; und folglich $A : B = C : D$ (§. 19.).

§. 24. Satz VI. Von vier geometrisch proportionirten Gröfsen ist die dritte der vierten gleich, wenn

die erste der zweiten gleich; ist die dritte gröfser als die vierte, wenn die erste gröfser als die zweite; und ist die dritte kleiner als die vierte, wenn die erste kleiner als die zweite ist.

Beweis. Es sey $A : B = C : D$.

1) Wenn $A = B$, und daher der Exponent des Verhältnisses A zu $B = 1$ ist; so ist auch (§. 17.) der Exponent des Verhältnisses C zu $D = 1$, und demnach $C = D$.

Wenn $A > B$; so ist der Exponent des Verhältnisses A zu B, wenn sie commensurabel sind, > 1; sind sie incommensurabel, so wird die niedrigere Grenze des Exponenten zum wenigsten $\frac{n}{n}$ seyn, weil (Vorauss.) $A > B$, oder $\frac{n}{n} B$, indem n irgend eine ganze Zahl bezeichnet. Daher ist (§. 17. 18.) auch der Exponent des Verhältnisses C zu D entweder > 1, oder die niedrigere Grenze dieses Exponenten mindestens $= \frac{n}{n}$: wornach ebenfalls $C > D$.

Wenn $A < B$; so ist der Exponent des Verhältnisses A zu B, wenn sie commensurabel sind, < 1; sind sie incommensurabel, so wird die höhere Grenze des Exponenten zum höchsten $\frac{n}{n}$ seyn, weil (Vorauss.) $A < B$ oder $\frac{n}{n} B$. Daher ist auch (§. 17. 18.) der Exponent des Verhältnisses C zu D entweder < 1, oder die höhere Grenze desselben zum höchsten $= \frac{n}{n}$; und daher gleichfalls $C < D$.

2) Wenn $A \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} B$; so ist auch (§. 4.) $2A \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} 2B$. Alsdann ist aber, da $A : B = C : D$ (Vorauss.), auch $2C \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} 2D$ (§. 19.); und daher (§. 4.) auch $C \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} D$.

§. 25. Scholion. In einigen Ausgaben der Elemente wird dieser Satz (entweder ganz, oder wenigstens die beiden letzteren Fälle desselben) dem 16ten Satze des B. V. als Zusatz beigefügt, und mittelst desselben bewiesen: wornach es scheinen könnte, dafs er

bloſs von vier Gröſsen von einerlei Art gelte. Er läſst sich aber allgemeiner als Converse des in §. 23. bewiesenen Satzes aussprechen, und auf die nämliche Art, welche wir hier gebraucht haben, beweisen: Wenn Gröſsen einer Art von Gröſsen einer anderen Art so abhängen, daſs allgemein, es mögen zwei beliebige Gröſsen C, D der zweiten Art ein Verhältniſs zu einander haben, welches man will, die ihnen entsprechenden Gröſsen A, B der ersteren Art das nämliche Verhältniſs zu einander haben: so sind die, gleichen Gröſsen der zweiten Art entsprechenden Gröſsen der ersteren Art ebenfalls gleich; die ungleichen entsprechenden aber, ungleich, und zwar diejenigen gröſser, welche den gröſseren entsprechen.

Denn wenn $C\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}D$; so ist auch $2C\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}2D$ (§. 4.). Da nun (Vorauss.) allgemein $A : B = C : D$; so ist auch (§. 19.) $2A\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}2B$, und daher (§. 4.) $A\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}B$.

§. 26. Satz VII. (*Eucl.* V, 4. *Zus.*) Wenn vier Gröſsen proportionirt sind; so sind sie auch umgekehrt (*inverse*) proportionirt; das ist, wenn $A : B = C : D$, so ist auch $B : A = D : C$.

Beweis. 1) Wenn die Gröſsen A und B, C und D unter einander commensurabel sind, und es haben beide Verhältnisse A zu B, C zu D einerlei ganze Zahl r, oder irgend eine gebrochene $\frac{r}{n}$ (§. 17.) zum Exponenten, so daſs zugleich $A = rB$ und $C = rD$, oder zugleich $A = \frac{r}{n}B$ und $C = \frac{r}{n}D$: so wird auch zugleich $B = \frac{1}{r}A$ und $D = \frac{1}{r}C$, oder zugleich $nA = rB$ und $nC = rD$

und daher $B = \frac{n}{r}A$ und $D = \frac{n}{r}C$ seyn;

folglich sind die Exponenten der Verhältnisse B zu A, D zu C, ebenfalls gleich.

Sind aber die Gröſsen A und B, C und D incommensurabel; so wird der Exponent beider Verhältnisse A zu B, C zu D zwischen einerlei Grenzen (§. 18.), z. B. $\frac{rn}{n(n+1)}$ und $\frac{rn+1}{n(n+1)}$ enthalten seyn; so daſs immer zugleich.

$A > \frac{rn}{n(n+1)}B$ und $< \frac{rn+1}{n(n+1)}B$ und umsomehr $< \frac{rn+r}{n(n+1)}B$,
und $C > \frac{rn}{n(n+1)}D$ und $< \frac{rn+1}{n(n+1)}D$ und umsomehr $< \frac{rn+r}{n(n+1)}D$,

Hiernach ist aber ebenfalls zugleich

$B < \frac{n(n+1)}{rn}A$ und $> \frac{n(n+1)}{rn+r}A$, oder $B < \frac{n+1}{r}A$ und $> \frac{n}{r}A$;
und $D < \frac{n(n+1)}{rn}C$ und $> \frac{n(n+1)}{rn+r}C$, oder $D < \frac{n+1}{r}C$ und $> \frac{n}{r}C$;

und demnach sind die Exponenten der Verhältnisse B zu A, D zu C gleichfalls zwischen einerlei Grenzen enthalten.

2) Da $A : B = C : D$ (Vorauss.) so ist (§. 19.) zugleich

$$rA \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} nB, \text{ und } rC \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} nD;$$

folglich auch zugleich

$$nB \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} rA, \text{ und } nD \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} rC;$$

und daher (§. 19.) $B : A = D : C$.

§. 27. Scholion. Simson bemerkt in den oben (§. 16.) angeführten Noten p. 396. fg. *) richtig; dafs dieser Satz VII. irriger Weise gewöhnlich dem 4ten Satze des B. V. der Elemente als Zusatz beigefügt werde; und dafs auch die aus dem Beweise ebendieses 4ten Satzes gezogene Consequenz zur Ableitung unseres VIIten aus demselben, unrichtig sey.

§. 28. Satz VIII. (*Eucl.* V, 4.) Wenn vier Gröfsen geometrisch proportionirt sind; so haben beliebige Gleichvielfache der ersten und dritten zu der zweiten und vierten, oder zu beliebigen Gleichvielfachen der zweiten und vierten; und ebenso die erste und dritte zu beliebigen Gleichvielfachen der zweiten und vierten, beziehungsweise einerlei Verhältnifs.

Das ist, wenn $A : B = C : D$:

so ist auch
$$pA : B = pC : D,$$
$$A : qB = C : qD,$$
$$pA : qB = pC : qD;$$

indem p und q beliebige ganze Zahlen bezeichnen.

*) Matthias a. a. O.

Beweis. 1) Wenn die Gröfsen A und B, C und D commensurabel sind; so ist auch, da $A : B = C : D$ (Voraus.), zugleich (§. 17.)

$A = rB$ und $C = rD$; oder $A = \frac{r}{n} B$ und $C = \frac{r}{n} D$.

Demnach ist auch zugleich

$pA = prB$ und $pC = prD$; oder $pA = \frac{pr}{n} B$ und $pC = \frac{pr}{n} D$:

$A = \frac{r}{q} qB$ u. $C = \frac{r}{q} qD$; od. $A = \frac{r}{qn} qB$ und $C = \frac{r}{qn} qD$:

$pA = \frac{pr}{q} qB$ u. $pC = \frac{pr}{q} qD$; od. $pA = \frac{pr}{qn} qB$ und $pC = \frac{pr}{qn} qD$.

Daher sind auch die Exponenten der Verhältnisse $pA : B$ und $pC : D$; $A : qB$ und $C : qD$; $pA : qB$ und $pC : qD$; beziehungsweise dieselben; nämlich pr oder $\frac{pr}{n}$; $\frac{r}{q}$ oder $\frac{r}{qn}$; $\frac{pr}{q}$ oder $\frac{pr}{qn}$.

Sind aber die Gröfsen A und B, C und D incommensurabel; so wird der Exponent beider Verhältnisse zwischen denselben Grenzen enthalten seyn (§. 18.); so dafs zugleich ist

$A > \frac{pr}{pn} B$ und $< \frac{pr+1}{pn} B$, und $C > \frac{pr}{pn} D$ und $< \frac{pr+1}{pn} D$;

und daher auch zugleich

$pA > \frac{pr}{n} B$ und $< \frac{pr+1}{n} B$, und $pC > \frac{pr}{n} D$ und $< \frac{pr+1}{n} D$:

oder auch zugleich

$A > \frac{r}{n} B$ und $< \frac{r+1}{n} B$, und $C > \frac{r}{n} D$ und $< \frac{r+1}{n} D$;

und daher wieder zugleich

$A > \frac{r}{qn} qB$ und $< \frac{r+1}{qn} qB$, und $C > \frac{r}{qn} qD$ und $< \frac{r+1}{qn} qD$:

oder auch zugleich

$A > \frac{pr}{pqn} qB$ und $< \frac{pr+1}{pqn} qB$, und $C > \frac{pr}{pqn} qD$ und $< \frac{pr+1}{pqn} qD$;

und daher ebenfalls zugleich

$pA > \frac{pr}{qn} qB$ und $< \frac{pr+1}{qn} qB$, und $C > \frac{pr}{qn} qD$ und $< \frac{pr+1}{qn} qD$.

Daher sind auch die Exponenten der Verhältnisse $pA : B$, und $pC : D$; $A : qB$, und $C : qD$; $pA : qB$ und $pC : qD$ beziehungsweise zwischen den nämlichen Grenzen $\frac{pr}{n}$ und $\frac{pr+1}{n}$; oder $\frac{r}{qn}$ und $\frac{r+1}{qn}$; oder $\frac{pr}{qn}$ und $\frac{pr+1}{qn}$ enthalten.

2) Da $A : B = C : D$ (Voraus.), folglich wenn man beliebige Gleichvielfache der ersten A und der dritten C, der zweiten B und der vierten D nimmt, die Vielfachen der ersten A und der zweiten B, und die Vielfachen der dritten C und der vierten D zugleich beziehungsweise einander gleich, oder die einen zugleich gröfser, oder zugleich kleiner sind, als die anderen (§. 19.); Gleichvielfache aber der Gröfsen pA und pC, qB und qD auch Gleichvielfache der Gröfsen A und C, B und D selbst sind (§. 10.): so folgt, dafs zugleich

sowohl $n(pA) \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} rB$, und $n(pC) \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} rD$;

als auch $pA \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} r(qB)$, und $nC \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} r(qD)$;

und ebenso $n(pA) \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} r(qB)$, und $n(pC) \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} r(qD)$:

woraus (vermöge §. 19.), die Richtigkeit des Satzes erhellt.

§. 29. Satz IX. Gleichvielfache, oder gleich-aliquote oder auch gleich-aliquante Theile der Gröfsen A und B haben zu diesen Gröfsen A und B selbst beziehungsweise einerlei Verhältnifs.

Das ist $$pA : A = pB : B;$$

$$\frac{A}{m} : A = \frac{B}{m} : B;$$

und $$\frac{p}{m}A : A = \frac{p}{m}B : B;$$

indem p und m beliebige ganze Zahlen bezeichnen.

Beweis. 1) Der Exponent der beiden Verhältnisse $pA : A$, und $pB : B$ ist p; der Exponent der beiden Verhältnisse $\frac{A}{m} : A$ und $\frac{B}{m} : B$ ist $\frac{1}{m}$; und der Exponent der beiden Verhältnisse $\frac{p}{m}A : A$ und $\frac{p}{m}B : B$ ist $\frac{p}{m}$.

2) Da sowohl $n(pA) = (np)A$, als auch $n(pB) = (np)B$ (§. 10.); so ist zugleich $n(pA) \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} nA$, und $n(pB) \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} rB$, jenachdem $np \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} r$ ist.

Es sey nun $\frac{A}{m}=E$ und $\frac{B}{m}=F$; folglich $A=mE$, und $B=mF$. So ist vermöge des so eben Bewiesenen

$$mE : E = mF : F$$

und daher auch umgekehrt $E : mE = F : mF$ (§. 26.); das ist

$$\frac{A}{m} : A = \frac{B}{m} : B.$$

Und da auf diese Art $\frac{1}{m}A : A = \frac{1}{m}B : B$:

so ist auch $\frac{p}{m}A : A = \frac{p}{m}B : B$ (§. 28.).

§. 30. Satz X. Umgehrt, wenn vier Gröfsen A, B, C, D geometrisch proportionirt sind; und es ist die erste A von der zweiten B ein Vielfaches, oder ein aliquoter, oder ein aliquanter Theil; so ist auch die dritte C von der vierten D ein Gleichvielfaches; oder ein gleich-aliquoter, oder ein gleich-aliquanter Theil.

Beweis. 1) Wenn $A : B = C : D$; und $A=qB$, oder $A=\frac{B}{m}$, oder $A=\frac{q}{m}B$; das ist, wenn der Exponent des Verhältnisses A zu B entweder q, oder $\frac{1}{m}$ oder $\frac{q}{m}$ ist: so ist auch der Exponent des Verhältnisses C zu D entweder q, oder $\frac{1}{m}$, oder $\frac{q}{m}$ (§. 17.); und daher gleichfalls $C=qD$; oder $C=\frac{D}{m}$; oder $C=\frac{q}{m}D$; indem q und m beliebige ganze Zahlen bezeichnen.

2) Da (Vorauss.) $A : B = C : D$; so ist auch (§. 28.);

$$A : qB = C : qD;$$
$$mA : B = mC : D;$$
$$\text{und } mA : qB = mC : qD.$$

Folgl. wenn $A=qB$; auch (§. 24.) $C=qD$;

wenn $mA=B$, od. $A=\frac{1}{m}B$; — — — $mC=D$, od. $C=\frac{1}{m}D$;

wenn $mA=qB$, od. $A=\frac{q}{m}B$; — — — $mC=qD$, od. $C=\frac{q}{m}D$.

§. 31. Satz XI. (*Eucl.* V, 17.) Wenn vier Gröfsen A, B, C, D geometrisch proportionirt sind; und die erste A ist gröfser als die zweite B, und daher auch (§. 24.) die dritte C gröfser als die vierte D; so verhält sich auch der Ueberschufs der ersten A über die zweite B zu dieser kleineren B, wie der Ueberschufs der dritten C über die vierte D sich zu dieser vierten D verhält.

Kurz ausgedrückt: wenn $A : B = C : D$; und es ist $A > B$, und ebenso (§. 24.) $C > D$: so ist auch getrennt (*dividendo*, oder *divisim*) $A - B : B = C - D : D$.

Beweis. 1) Da (Vorauss.) $A : B = C : D$; so ist (§. 17. 18.)

zugleich $A = rB$; oder $A = \frac{r}{n}B$; oder $A > \frac{r}{n}B$, und $< \frac{r+1}{n}B$;

u. ebenso $C = rD$; oder $C = \frac{r}{n}D$; oder $C > \frac{r}{n}D$, und $< \frac{r+1}{n}D$;

indem r und n beliebige ganze Zahlen bezeichnen: jedoch, da (Vorauss.) $A > B$ und $C > D$ ist, so dafs $r > n$, wenn die Gröfsen A und B, C und D commensurabel sind; wenn sie aber incommensurabel sind, r nicht $< n$ ist.

Alsdann aber ist auch zugleich

$$A - B = (r-1)B; \text{ oder } A - B = \left(\frac{r}{n} - 1\right)B \text{ oder } \frac{r-n}{n}B;$$

$$\text{od. } A - B > \frac{r-n}{n}B \text{ und } < \frac{r-n+1}{n}B;$$

und $C - D = (r-1)D$; oder $C - D = \left(\frac{r}{n} - 1\right)D$ oder $\frac{r-n}{n}D$;

$$\text{od. } C - D > \frac{r-n}{n}D \text{ und } < \frac{r-n+1}{n}D;$$

und folglich sind die Exponenten der Verhältnisse $A - B : B$, und $C - D : D$ entweder die nämlichen, oder zwischen den nämlichen Grenzen enthalten.

2) Wenn $n(A-B) \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} rB$; so ist, da $n(A-B) = nA - nB$ (§. 7.);

$$nA - nB \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} rB; \text{ und, wenn man beiderseits } nB \text{ addirt,}$$

$$nA \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} nB + rB \text{ oder } (n+r)B \text{ (§. 8.).}$$

Da nun (Vorauss.) $A : B = C : D$; so ist (§. 19.) auch zugleich $nC \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} (n+r)D$ oder $nD + rD$ (§. 8.); und wenn man beiderseits nD hinwegnimmt, auch $nC - nD$, das ist (§. 7.) $n(C-D) \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} rD$. Es ist daher zugleich $n(A-B) \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} rB$, und $n(C-D) \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} rD$; und hiernach (§. 19.) $A - B : B = C - D : D$.

(*Fig.* 13.) Diese zweite Beweisart läfst sich auch so vortragen. Man stelle die Gröfsen *A*, *B*, *C*, *D* durch die Linien *EF*, *FG*, *HJ*, *JK* dar; so dafs *EF*: *FG*=*HJ*: *JK*. So stellen *EG*, *HK* die Ueberschüsse *A*—*B*, *C*—*D* der gröfseren über die kleineren dar; und es wird zu beweisen seyn, dafs auch *EG*: *FG*=*HK*: *JK*. Zu diesem Ende nehme man von den Gröfsen *EG*, *FG*, *HK*, *JK*, beliebige Gleichvielfache (die *n*fachen), welche die Linien *LM*, *LP*, *NO*, *NQ* seyen. So sind (§. 6.) *PM*, *QO* die nämlichen Gleichvielfachen (die *n*fachen) der Gröfsen *EF*, *HJ*. Ferner nehme man noch beliebige Gleichvielfache (die *r*fachen) *PR*, *QS* der Gröfsen *FG*, *JK*; so sind auch *LR*, *NS* (§. 8.) Gleichvielfache (die $n+r$fachen) der Gröfsen *FG*, *JK*. Da nun (Vorauss.) *EF*: *FG*=*HJ*: *JK*; so ist (§. 19.) zugleich

$$PM \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} LR, \text{ und } QO \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} NS.$$

Läfst sich nun hieraus folgern, dafs auch zugleich

$$LM \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} PR, \text{ und } NO \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} QS;$$

so folgt (§. 19.), dafs auch *EG*: *FG*=*HK*: *JK*.

Wenn nun $LM \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} PR$; so ist, wenn man beiderseits *LP* addirt, auch $PM \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} LR$; und daher (Vorauss. und §. 19.) auch $QO \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} NS$; folglich wenn man die gemeinschaftliche *NQ* beiderseits hinwegnimmt, auch $NO \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} QS$.

§. 32. Zusatz 1. Wenn von vier Gröfsen *A*, *B*, *C*, *D*, je zwei in einerlei Verhältnifs sind, und es ist die erste *A* kleiner als die zweite *B*, und daher auch (§. 24.) die dritte *C* kleiner als die vierte *D*; so ist auch umgekehrt (§. 26.) *B*: *A*=*D*: *C*; wo alsdann schon die erste *B*> die zweite *A*, und die dritte *D*> die vierte *C*: folglich (§. 31.) *B*—*A*: *A*=*D*—*C*: *C*.

§. 33. Zusatz 2. Daher wird allgemein, wenn zwei ungleiche Gröfsen *A* und *B* dasselbe Verhältnifs

zu einander haben, wie zwei andere ungleiche Gröfsen C und D: auch der Unterschied der beiden ersteren zu der kleineren von denselben sich verhalten, wie der Unterschied der beiden letzteren zu der kleineren von diesen; oder auch umgekehrt (§. 26.) die kleinere von den beiden ersteren zu deren Unterschiede sich verhalten, wie die kleinere von den beiden letzteren zu deren Unterschiede.

Kurz ausgedrückt: wenn $A : B = C : D$;
so ist auch getrennt (*dividendo*)
$A-B : B = C-D : D$; oder $B : A-B = D : C-D$;
und $B-A : A = D-C : C$; oder $A : B-A = C : D-C$.

§. 34. Satz XII. (*Eucl.* V, 19. Zus.) Wenn vier Gröfsen A, B, C, D geometrisch proportionirt sind, und die erste A ist gröfser als die zweite B, und daher auch (§. 24.) die dritte C gröfser als die vierte D: so verhält sich auch die erste A zu ihrem Ueberschufs über die zweite B, wie die dritte C zu ihrem Ueberschufs über die vierte D.

Kurz ausgedrückt: Wenn $A : B = C : D$, und $A > B$, und ebenso (§. 24.) $C > D$: so ist auch zurückkehrend (*convertendo*) $A : A-B = C : C-D$.

Beweis. 1) Da $A : B = C : D$ (Vorauss.) so ist (§. 17. 18.) zugleich

$$A = rB;\ \text{oder}\ A = \frac{r}{n}B;\ \text{oder}\ A > \frac{r}{n}B\ \text{und}\ < \frac{r+1}{n}B;$$

und $C = rD$; oder $C = \frac{r}{n}D$; oder $C > \frac{r}{n}D$ und $< \frac{r+1}{n}D$;

oder es ist zugleich

$$B = \frac{A}{r};\ \text{oder}\ B = \frac{n}{r}A;\ \text{oder}\ B < \frac{n}{r}A\ \text{und}\ > \frac{n}{r+1}A;$$

und $D = \frac{C}{r}$; oder $D = \frac{n}{r}C$; oder $D < \frac{n}{r}C$ und $> \frac{n}{r+1}C$;

indem r und n beliebige ganze Zahlen bezeichnen; jedoch so, dafs, wenn die Gröfsen commensurabel sind, $r > n$ sey, im Fall sie aber incommensurabel sind, r wenigstens nicht $< n$ sey (wie im Bew. §. 31.).

Alsdann ist aber auch zugleich

$$A-B = \left(1-\frac{1}{r}\right)A;\ \text{od.}\ A-B = \left(1-\frac{n}{r}\right)A;$$

$$\text{od.}\ A-B > \left(1-\frac{n}{r}\right)A\ \text{u.}\ < \left(1-\frac{n}{r+1}\right)A;$$

und $C-D = \left(1-\frac{1}{r}\right)C$; od. $C-D = \left(1-\frac{n}{r}\right)C$;

$$\text{od.}\ C-D > \left(1-\frac{n}{r}\right)C\ \text{u.}\ < \left(1-\frac{n}{r+1}\right)C;$$

d. h. es ist sowohl $A-B=\frac{r-1}{r}A$; od. $A-B=\frac{r-n}{r}A$;

od. $A-B>\frac{r-n}{r}A$ und $<\frac{r-n+1}{r+1}A$ und umsomehr $<\frac{r-n+1}{r}A$;

als auch $C-D=\frac{r-1}{n}C$; od. $C-D=\frac{r-n}{r}C$;

od. $C-D>\frac{r-n}{r}C$ und $<\frac{r-n+1}{r+1}C$ und umsomehr $<\frac{r-n+1}{r}C$.

Demnach ist (§. 17. 18.) $A-B : A=C-D : C$, und daher auch umgehrt (§. 26.) $A : A-B=C : C-D$.

2) (*Fig.* 14. 15. 16. 17.) Es seyen die Gröfsen A, B, C, D durch die Linien EF, FG, HJ, JK dargestellt, so dafs $EF : FG=HJ : JK$ sey. So stellen EG, HK die Ueberschüsse $A-B$, $C-D$ der gröfseren über die kleineren dar: und es ist zu beweisen, dafs auch $EF : EG=HJ : HK$ sey.

Zu diesem Ende nehme man beliebige Gleichvielfache (die $r$fachen) von den Gröfsen EG, FG, HK, JK, welche die Linien LM, LP, NO, NQ seyen. So sind (§. 6.) PM, QO die nämlichen Gleichvielfachen (gleichfalls die $r$fachen) von den Gröfsen EF, HJ. Ferner nehme man noch beliebige Gleichvielfache (die $n$fachen) der Gröfsen EF, HJ, welches die Linien PR, QS seyen.

(*Fig.* 14. 15.) Wenn $n\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}r$; so ist zugleich $PR\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}PM$ und $QS\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}QO$: folglich, da $PM>LM$, und $QO>NO$ (§. 4.); so ist in beiden Fällen $PR>LM$, und $QS>NO$; das ist $nEF>rEG$, und $nHJ>rHK$; oder zugleich $nA>r(A-B)$, und $nC>r(C-D)$.

(*Fig.* 16. 17.) Ist aber $r>n$; so ist zugleich $PM>PR$, und $QO>QS$. Ferner, da sowohl PM und QO, als auch PR und QS (Constr.) Gleichvielfache der Gröfsen EF, HJ, die ersteren nämlich ihre $r$fachen, die letzteren ihre $n$fachen sind: so werden die Ueberschüsse der ersteren über die letzteren, RM und SO (§. 12.), entweder den Linien EF und HJ selbst gleich (wenn nämlich $r=n+1$), oder Gleichvielfache derselben (nämlich die $r-n$fachen) seyn. Da nun $EF : FG=HJ : JK$ (Voraussetzung) so ist (§. 28.) sowohl $EF : rFG=HJ : rJK$, als auch $(r-n)EF : rFG=(r-n)HJ : rJK$; d. h. es ist in beiden Fällen $RM : PL=SO : QN$.

Daher ist (§. 24.) zugleich

$$PL \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} RM, \quad \text{und} \quad QN \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} SO.$$

Folglich ebenfalls zugleich

$$PL+LR \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} LR+LM \text{ u. } QN+NS \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} NS+SO;$$

oder zugleich

$$PR \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} LM, \quad \text{und} \quad QS \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} NO:$$

d. h. es ist zugleich

$$nEF \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} rEG, \quad \text{und} \quad nHJ \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} rHK;$$

oder zugleich

$$nA \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} r(A-B), \quad \text{und} \quad nC \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} r(C-D).$$

Es mögen daher n und r ganze Zahlen bezeichnen, welche man immer will, oder man mag Gleichvielfache der ersten A und der dritten C, und so auch der zweiten $A-B$ und der vierten $C-D$ annehmen, welche man will: so sind die Vielfachen der ersten A und der zweiten $A-B$, und die Vielfachen der dritten C und der vierten $C-D$ immer zugleich entweder einander gleich, oder die einen zugleich gröfser, oder zugleich kleiner, als die anderen. Demnach ist (§. 19.) $A : A-B = C : C-D$.

§. 35. Zusatz 1. Wenn vier Gröfsen A, B, C, D proportionirt sind, und es ist die erste A kleiner als die zweite B, und daher auch (§. 24.) die dritte C kleiner als die vierte D: so ist auch umgekehrt $B : A = D : C$ (§. 26.), wo alsdann die erste $B >$ die zweite A, und die dritte $D >$ die vierte C. Folglich ist (§. 34.) $B : B-A = D : D-C$.

§. 36. Zusatz 2. Daher wird allgemein, wenn zwei ungleiche Gröfsen A und B dasselbe Verhältnifs zu einander haben, wie zwei andere ungleiche Gröfsen C und D: auch die gröfsere von den beiden ersteren zu deren Unterschiede sich verhalten, wie die gröfsere von den beiden letzteren zu deren Unterschiede; oder auch umgekehrt (§. 26.) der Unterschied der beiden ersteren

sich zu der gröfseren von denselben verhalten, wie der Unterschied der beiden letzteren zu der gröfseren von diesen.

Kurz ausgedrückt: wenn $A : B = C : D$,
so ist auch zurückkehrend (*convertendo*)

$A : A - B = C : C - D$, oder $A - B : A = C - D : C$;
und $B : B - A = D : D - C$, oder $B - A : B = D - C : D$.

§. 37. Zusatz 3. Und noch allgemeiner, wenn zwei ungleiche Gröfsen sich ebenso zu einander verhalten, wie zwei andere ungleiche Gröfsen: so verhält sich auch die eine oder die andere von den ersteren zu deren Unterscheide, wie die homologe, oder die der ersteren der Ordnung nach entsprechende von den letzteren zum Unterschiede der letzteren; und umgekehrt (§. 33. 36.).

§. 38. Scholion. Unser XIIter Satz wird irriger Weise gewöhnlich dem 19ten Satze des B. V. der Elemente als Zusatz beigefügt, und aus diesem mittelst des 16ten abgeleitet: da es auf diese Art scheinen könnte, als ob derselbe blofs von vier Proportional-Gröfsen von einerlei Art gälte, was keineswegs der Fall ist. Dieſs haben auch Simson in den schon angeführten Noten p. 316.*) und Clavius in seiner Ausgabe der Elemente Vol. I. p. 511. bemerkt, welch' Letzterer jedoch Stellung und Aufschrift desselben nicht geändert hat, vielmehr denselben ausdrücklich mit den Worten: „*hinc facile demonstrabitur*" beginnt; ob er gleich an die Stelle des fehlerhaften gewöhnlichen seinen eigenen richtigen, aus den Sätzen 17. und 18. des V. Buches abgeleiteten Beweis gesetzt hat.

§. 39. Satz XIII. (*Eucl.* V, 18.) Wenn vier Gröfsen geometrisch proportionirt sind; so verhält sich auch die Summe der beiden ersteren zu einer von diesen, wie die Summe der beiden letzteren zu derjenigen von diesen, welche der in die Proportion aufgenommenen ersteren der Ordnung nach entspricht.

Das ist, wenn $A : B = C : D$;
so ist auch verbunden (*componendo*)

$$A + B : \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = C + D : \begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix}.$$

Beweis. 1) Es ist nämlich (verm. d. Voraus. u. §. 17. 18.)

*) Matthias p. 67.

zugleich $A=rB$; oder $A=\frac{r}{n}B$; oder $A>\frac{r}{n}B$ und $<\frac{r+1}{n}B$;

und $C=rD$; oder $C=\frac{r}{n}D$; oder $C>\frac{r}{n}D$ und $<\frac{r+1}{n}D$:

und daher auch zugleich

$A+B=(r+1)B$; od. $A+B=\frac{r+n}{n}B$; od. $A+B>\frac{r+n}{n}B$ u. $<\frac{r+n+1}{n}B$;

und

$C+D=(r+1)D$; od. $C+D=\frac{r+n}{n}D$; od. $C+D>\frac{r+n}{n}D$ u. $<\frac{r+n+1}{n}D$.

Folglich ist (§. 17. 18.) $A+B : B=C+D : D$; oder die Summe der beiden ersteren verhält sich zum Hintergliede unter denselben, wie die Summe der beiden letzteren zum Hintergliede unter diesen.

Nun ist, wenn $A : B=C : D$, auch umgekehrt (§. 26.) $B : A=D : C$; und daher vermöge des so eben Bewiesenen auch $A+B : A=C+D : C$.

2) (*Fig.* 18. 19. 20. 21.) Es seyen die Gröfsen A, B, C, D durch die Linien EG, FG, HK, JK dargestellt, so dafs $EG : FG=HK : JK$. So stellen EF, HJ die Summen $A+B$, $C+D$ jener Gröfsen dar, und es ist zu beweisen, dafs auch $EF : \left\{\begin{matrix}EG\\FG\end{matrix}\right\}=HJ : \left\{\begin{matrix}HK\\JK\end{matrix}\right\}$.

Zu diesem Zwecke nehme man beliebige Gleichvielfache (die $n$fachen) der Gröfsen EF, FG, HJ, JK an, welche die Linien PM, LP, QO, NQ seyen. So sind (§. 7.) die Linien LM, NO die nämlichen Gleichvielfachen (gleichfalls die $n$fachen) der Gröfsen EG, HK. Sodann nehme man noch beliebige Gleichvielfache (die $r$fachen) der Gröfsen EG, HK, welche die Linien LR, NS seyen.

(*Fig.* 18. 19.) Wenn nun $n\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}r$; so ist zugleich $LM\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}LR$, und $NO\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}NS$; folglich wird, da $PM>LM$, und $QO>NO$, in beiden Fällen zugleich $PM>LR$, und $QO>NS$; das ist $nEF>rEG$, und $nHJ>rHK$; oder zugleich $n(A+B)>rA$, und $n(C+D)>rC$ seyn.

(*Fig.* 20. 21.) Ist aber $r>n$; so ist zugleich $LR>LM$, und $NS>NO$. Ferner, weil sowohl LR und NS, als LM und NO (Constr.) Gleichvielfache der Gröfsen EG, HK sind; die ersteren nämlich ihre $r$fachen, die letzteren ihre $n$fachen: so werden die Ueberschüsse RM und SO der ersteren über die letzteren (§. 12.) entweder den Gröfsen EG, HK selbst gleich (wenn nämlich

$r=n+1$), oder Gleichvielfache ebendieser Gröfsen (nämlich die $r-n$fachen) seyn. Da nun $EG : FG = HK : JK$ (Vorauss.); so ist (§. 28.) sowohl $EG : nFG = HK : nJK$, als auch $(r-n)EG : nFG = (r-n)HK : nJK$; d. h. es ist in beiden Fällen $RM : LP = SO : NQ$.

Daher ist (§. 24.) zugleich

$$LP \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} RM, \quad \text{und} \quad NQ \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} SO.$$

Folglich auch zugleich

$$LP+LM \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} RM+LM, \text{ u. } NQ+NO \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} SO+NO;$$

oder zugleich

$$PM \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} LR, \quad \text{und} \quad QO \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} NS:$$

das ist zugleich

$$nEF \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} rEG, \quad \text{und} \quad nHJ \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} rHK;$$

oder zugleich

$$n(A+B) \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} rA, \quad \text{und} \quad n(C+D) \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} rC.$$

Es mögen daher n und r ganze Zahlen bezeichnen, welche man immer will, oder man mag Gleichvielfache der ersten $A+B$ und der dritten $C+D$, und so auch der zweiten A und der vierten C nehmen, welche man will; so sind die Vielfachen der ersten $A+B$ und der zweiten A, und die Vielfachen der dritten $C+D$ und der vierten C immer zugleich entweder einander gleich, oder die einen zugleich gröfser oder zugleich kleiner als die anderen; und daher (§. 19.)

$$A+B : A = C+D : C.$$

Auf die nämliche Art läfst sich auch beweisen, wenn man nach den ersten Gleichvielfachen (den $n$fachen) PM, LP, QO, NQ der Gröfsen EF, FG, HJ, JK, von den Punkten L, N an gegen die Punkte P, Q hin, Gleichvielfache (die $r$fachen) der Gröfsen FG, JK, annimmt: dafs $A+B : B = C+D : D$ sey.

§. 40. Scholion 1. Hieron. Saccherius in seiner Schrift: *Euclides ab omni naevo vindicatus, sive conatus geometricus, quo stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae principia*, p. 111. fg. und Simson in den an-

geführten Noten p. 314.*) machen die richtige Bemerkung: der Beweis des vorhergehenden Satzes, so wie er gewöhnlich in den Ausgaben der Elemente vorgetragen wird, sey dem Geiste Euclid's nicht angemessen, noch überhaupt richtig, da derselbe postulire, was nirgends vorher gezeigt worden sey: zu drei gegebenen Gröfsen die vierte geometrische Proportional-Gröfse zu finden. Die Art aber, wie der Erstere (a. O. p. 115. fgg.) diesen Fehler verbessern will, wird von dem Letzteren mit Recht verworfen (a. O. p. 315. fg.**)).

§. 41. Scholion 2. Der XII. Satz läfst sich auch aus den Sätzen XI. und XIII. mittelst des VIIten folgendermafsen ableiten.

Wenn $A:B=C:D$, wobei $A>B$ und daher (§. 24.) $C>D$; so ist $A-B:B=C-D:D$ verm. Satz XI.
und $B:A-B=D:C-D$ verm. Satz VII.
Daher
$B+A-B:A-B=D+C-D:C-D$ verm. Satz XIII.
das ist $A:A-B=C:C-D$, welches der Satz XII. ist.

Dieſs ist auch die Beweisart, welche Clavius an dem oben (§. 38.) angeführten Orte der gewöhnlichen substituirt, und welche auch Simson in seiner lateinischen Uebersetzung der Elemente p. 136.***) aufgenommen hat.

§. 42. Satz XIV. (*Eucl.* V, 11.) Verhältnisse, welche einem und demselben dritten Verhältnisse gleich sind, sind unter sich selbst gleich.

Das ist: wenn $A:B=C:D$,
und $C:D=E:F$;
so ist auch $A:B=E:F$.

Beweis. 1) Wenn nämlich der Exponent des Verhältnisses A zu B entweder r oder $\frac{r}{n}$ ist, oder die Grenzen desselben $\frac{r}{n}$ und $\frac{r+1}{n}$ sind: so ist, da $A:B=C:D$ (Vorauss.), auch der Exponent des Verhältnisses C zu D entweder r oder $\frac{r}{n}$, oder die Grenzen desselben sind $\frac{r}{n}$ und $\frac{r+1}{n}$ (§. 17. 18.): und daher ist auch, da $C:D=E:F$, der Exponent des Verhältnisses E zu F ent-

*) Matthias p. 63.
**) — — p. 64. fg.
***) — — p. 66. fg.

weder r oder $\frac{r}{n}$, oder die Grenzen desselben sind $\frac{r}{n}$ und $\frac{r+1}{n}$ (§. 17. 18.).

2) Man nehme von den Gröfsen A, C, E beliebige Gleichvielfache nA, nC, nE, und von den Gröfsen B, D, F ebenfalls beliebige Gleichvielfache rB, rD, rF: so ist, wenn $nA \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} rB$, auch $nC \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} rD$ (§. 19.) da $A : B = C : D$ (Vorauss.). Wenn aber $nC \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} rD$, so ist auch $nE \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} rF$ (§. 19.) da $C : D = E : F$ (Vorauss.). Daher ist auch zugleich $nA \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} rB$, und $nE \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} rF$:

und folglich (§. 19.) $A : B = E : F$.

§. 43. Satz XV. (*Eucl.* V, 12.) Wenn gleichartige Gröfsen von beliebiger Anzahl A, C, E, G u. s. w. zu ebensovielen anderen (gleichfalls sowohl unter sich, als mit ersteren gleichartigen, §. 13.) B, D, F, H u. s. w. je eine der ersteren zu einer der letzteren einerlei Verhältnifs haben; so dafs $A : B = C : D = E : F = G : H$ u. s. w.: so verhält sich auch die Summe aller Vorderglieder $A+C+E+F+$ u. s. w. zu der Summe aller Hinterglieder $B+D+F+H+$ u. s. w. wie eines der Vorderglieder A zu seinem Hintergliede B.

Beweis. 1) Da nämlich $A : B = C : D = E : F = G : H$ u. s. w. (Vorauss.) so ist (§. 17. 18.) zugleich

$A = rB$, oder $A = \frac{r}{n}B$, oder $A > \frac{r}{n}B$ und $< \frac{r+1}{n}B$;

$C = rD$, oder $C = \frac{r}{n}D$, oder $C > \frac{r}{n}D$ und $< \frac{r+1}{n}D$;

$E = rF$, oder $E = \frac{r}{n}F$, oder $E > \frac{r}{n}F$ und $< \frac{r+1}{n}F$;

$G = rH$, oder $G = \frac{r}{n}H$, oder $G > \frac{r}{n}H$ und $< \frac{r+1}{n}H$;

u. s. w. u. s. w. u. s. w.

folglich auch (§. 5.) $A+C+E+G+$ u. s. w.

entweder $= r(B+D+F+H+$ u. s. w.) od. $= \frac{r}{n}(B+D+F+H+$ u. s. w.),

oder $> \frac{r}{n}(B+D+F+H+$ u. s. w.) u. $< \frac{r+1}{n}(B+D+F+H+$ u. s. w.)

Woraus der Satz (§. 17. 18.) erhellt.

2) Da $A : B = C : D = E : F = G : H$ u. s. w. so ist zugleich (§. 19.)

$$\left.\begin{matrix} nA \\ nC \\ nE \\ nG \\ \text{u. s. w.} \end{matrix}\right\} \gtrless \left\{\begin{matrix} rB, \\ rD, \\ rF, \\ rH, \\ \end{matrix}\right.$$

indem n und r beliebige ganze Zahlen bezeichnen. Daher ist auch

$$nA+nC+nE+nG+\text{u.s.w.} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \gtrless \left\{\begin{matrix} rB+rD+rF+rH+\text{u.s.w.} \\ \end{matrix}\right.$$

das ist (§. 5.)

$$n(A+C+E+G+\text{u.s.w.}) \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \gtrless \left\{\begin{matrix} r(B+D+F+H+\text{u.s.w.}) \\ \end{matrix}\right.$$

je nachdem $nA \gtrless rB$.

Daher ist (§. 19.)

$A : B = A+C+E+G+$ u. s. w. :
$B+D+F+H+$ u. s. w.

§. 44. Zusatz 1. (*Eucl.* V, 15.) Wenn die Gröfsen A, C, E, G u. s. w. einander gleich sind; und ebenso auch die Gröfsen B, D, F, H u. s. w.; so werden die Summen $A+C+E+G+$ u. s. w. und $B+D+F+H+$ u. s. w. Gleichvielfache der Gröfsen A und B. Daher verwandelt sich alsdann der Satz in diesen:

$$A : B = pA : pB;$$

indem p irgend eine ganze Zahl bezeichnet: das ist, zwei Gröfsen verhalten sich zu einander, wie beliebige Gleichvielfache derselben; oder gleich-aliquote Theile zweier Gröfsen haben das nämliche Verhältnifs zu einander, wie die Gröfsen selbst.

§. 45. Zusatz 2. Ebenso haben auch gleich-aliquante Theile zweier Gröfsen dasselbe Verhältnifs zu einander, wie die Gröfsen selbst.

Denn wenn $pR = A$ und $pS = B$,

oder $R = \frac{1}{p}A$ und $S = \frac{1}{p}B$;

so ist alsdann $R : S = pR : pS$ (§. 44.)

oder $R : S = A : B$

und ebenso $R : S = mR : mS$ (§. 44.)

oder $R : S = \frac{m}{p}A : \frac{m}{p}B$.

Daher ist auch (§. 42.) $\frac{m}{p}A : \frac{m}{p}B = A : B$

indem m und p beliebige ganze Zahlen bezeichnen.

II.

Die Sätze von den ungleichen Verhältnissen mit ihren, blos aus den Definitionen und Sätzen des V. Buches der Elemente abgeleiteten Beweisen.

§. 1. Aufser den bei Euclid in den Elementen vorkommenden Sätzen von den ungleichen Verhältnissen, nämlich dem 8ten, 10ten und 13ten des V. Buches, giebt es noch manche andere, von welchen sich bei Euclid in den Datis, bei Apollonius, Pappus und vielen anderen Geometern häufige Anwendungen finden. Mehrere dieser Sätze sind in den Lehnsätzen, welche Pappus (*Collect. Math.* Lib. VII.) den Büchern des Apollonius *de sect. rat. et spat.* vorausgeschickt hat, vom 3ten bis zum 11ten enthalten: jedoch sind die meisten von diesen nicht in der Art ausgesprochen, oder bewiesen, dafs sie von Gröfsen jeder Art verstanden werden könnten (es war nämlich für den dortigen Zweck blofs nothwendig, sie für gerade Linien geltend zu machen); indem der Verfasser, was den Ausdruck betrifft, von den in Rede stehenden Gröfsen gewöhnlich im Neutrum, und, wie es scheint, eher unbestimmt, als allgemein von jeder Gröfse (μεγεθει), zweimal aber, im 9ten Lehnsatze und im Beweise des 8ten im Femininum als von einer ευθειᾳ spricht, und auch im 11ten etwas von den Rechtecken beifügt; und in den Beweisen verlangt wird, zu drei gegebenen Gröfsen die vierte, oder zu der ersten, zweiten und vierten die dritte Proportionalgröfse zu finden; welche, wenn die gegebenen Gröfsen gerade Linien sind, der 2te Satz finden lehrt.

Wie dem auch sey, so scheint es, dafs diese Sätze von den Auslegern und Commentatoren der Elemente,

Campanus, (in der Arabischen Version des Nasireddin finden sie sich nicht) Commandin (welcher ausdrücklich bemerkt, dafs er dieselben aus den *Collect. Math.* des Pappus, nur in veränderter Ordnung und mit einigen Beisätzen und Weglassungen übertrage), Clavius, Tacquet, Barrow, Baermann und andern, aus Pappus aufgenommen worden seyen: jedoch so, dafs dieselben, obgleich sie von ihnen theils dem VI. Buche der Elemente vorausgeschickt, theils allgemein, als von allen Gröfsen gültig, ausgesprochen wurden, dennoch nicht ohne jenen Lehnsatz von der dritten oder vierten Proportionale bewiesen sind; indem Mehrere diesen Letzteren, wiewohl zugleich auch wegen B. V, 18. und XII., sogar ausdrücklich als Axiom oder Postulat, dem V. Buche vorausschicken (m. s. die Abhandlung Pfleiderers über die Kreismessung §. 51. fg.). Es wird indessen erhellen, dafs derselbe für den Beweis jener Sätze von den ungleichen Verhältnissen entbehrlich sey, wenn man sie unmittelbar auf die Definitionen und Sätze des V. Buches zurückführt. Und dieſs werden wir in der Ordnung auszuführen suchen, dafs wir zuerst diejenigen Sätze feststellen, welche sich auf zwei oder mehrere ungleiche Verhältnisse allgemein beziehen; und sodenn (§. 41. fgg.) zu denjenigen übergehen, welche nur dann gelten, wenn die Glieder des einen Verhältnisses mit den Gliedern des andern, oder der anderen gleichartig sind.

§. 2. Lehnsatz I. Gleicher Gröfsen, oder der nämlichen Gröfse Gleichvielfache sind gleich, ungleicher hingegen ungleich, die der gröfseren nämlich gröfser. Umgekehrt, sind Gröfsen, deren Gleichvielfache gleich sind, einander selbst gleich; von welchen sie hingegen ungleich sind, einander selbst ungleich, und zwar diejenige gröfser, deren Vielfaches gröfser ist.

Kurz ausgedrückt:

Wenn $A=B$, so ist auch $mA=mB$; wenn $A>B$, so ist auch $mA>mB$:
u. wenn $mA=mB$, - - - - $A=B$; wenn $mA>mB$, - - - - $A>B$;

indem m und n beliebige ganze Zahlen bezeichnen.

Den Beweis siehe in d. angef. Abhandlung Note 4. zu §. 48.

§. 3. Lehnsatz II. Gleicher Gröfsen oder der nämlichen Gröfse ungleich-vielfache sind ungleich, dasjenige nämlich gröfser, welches mehr-vielfach ist. Gleicher Gröfsen oder der nämlichen Gröfse gleiche Vielfache hingegen sind gleich-vielfach; ungleiche aber un-

gleich-vielfach, dasjenige nämlich mehr-vielfach, welches das gröfsere ist.

Kurz ausgedrückt

wenn $A=B$, und $m > n$, so ist $mA>nB$,
— — — — $mA=nB$ — — $m = n$,
— — — — $mA<nB$ — — $m < n$,

indem m und n beliebige ganze Zahlen bezeichnen.

Beweis. Wenn $m>n$, so sey $m=n+r$; so wird, da $A=B$, (§. 2.) $mA=(n+r)B=$ (V, 1.)$nB+rB>nB$ seyn: woraus sodenn das Uebrige folgt.

§. 4. Lehnsatz III. Wenn man von irgend einer Gröfse A zuerst irgend ein Vielfaches mA, und sodann von diesem Vielfachen mA wieder irgend ein Vielfaches $n(mA)$ nimmt; so ist es dasselbe, wie wenn man in umgekehrter Ordnung zuerst das zweite Vielfache (das $n$fache), von der Gröfse A, und sodenn von diesem nA das erstere Vielfache, (das $m$fache) $m(nA)$ genommen hätte.

Kurz ausgedrückt: $n(mA)=m(nA)$,
indem m und n dasselbe, wie §. 2. 3. bezeichnen.

Beweis. Da man das Vielfache mA erhält, wenn man die Gröfse A so oftmal nimmt, als Einheiten in der ganzen Zahl m enthalten sind, oder da

$mA=A+A+A+A+\ldots\ldots$,

wobei die Anzahl der A rechts von dem Gleichheitszeichen m ist:

so ist (V, 1.) $n(mA)=nA+nA+nA+nA+\ldots\ldots$,

wobei die Anzahl der nA zur Rechten des Gleichheitszeichens gleichfalls m ist.

Sonach ist aber $nA+nA+nA+nA+\ldots\ldots=m(nA)$;
und daher $n(mA)=m(nA)$.

§. 5. Satz I. Wenn von vier Gröfsen A, B, C, D die erste A zu der zweiten B ein gröfseres Verhältnifs hat, als die dritte C zu der vierten D; so hat umgekehrt (*inverse*) die zweite B zu der ersten A ein kleineres Verhältnifs, als die vierte D zu der dritten C.

Kurz ausgedrückt:

wenn $A:B>C:D$, so ist $B:A<D:C$, oder $D:C>B:A$.

Beweis. Da $A:B>C:D$ (Vorauss.), so lassen sich (V, Def. 7.) von den Vordergliedern A, C, und von den Hintergliedern B, D Gleichvielfache annehmen, so dafs

$mA>nB$, $mC\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}nD$ ist.

Wenn nun $mC<nD$, oder $nD>mC$, so wird, da $nB<mA$, der Satz vermöge V, Def. 7. richtig seyn.

Ist aber $mC = nD$: so sey, da $mA > nB$,
$nB + E = mA$,
und 1stens $E \left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\} A$; so ist, wenn man diese letzteren abzieht,
$nB \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} (m-1)A$:
und da $nD = mC$ (Vorauss.) $> (m-1)C$; so ist der Satz wieder vermöge V, Def. 7. richtig.

Wenn nun 2tens $E < A$,
so nehme man irgend ein Vielfaches von E, z. B. $rE > A$ (V, Def. 4.);
so ist alsdann, da $nB + E = mA$,
auch (§. 2.) $r(nB + E)$, d. i. (V, 1.) $r.nB + rE = r.mA$:
und es bleibt, wenn man $rE > A$ abzieht,
$r.nB < (r.m-1)A$.
Da aber $nD = mC$, so ist (§. 2.) $r.nD = r.mC > (r.m-1)C$. Da nun $r.nB$, $r.nD$ von den Gröfsen nB, nD, und daher auch (V, 3.) von den Gröfsen B, D selbst; und ebenso $r.mA$, $r.mC$, und daher auch $(r.m-1)A$, $(r.m-1)C$ von den Gröfsen A, C Gleichvielfache sind: so ist (V, def. 7.) $D : C > B : A$, oder $B : A < D : C$.

§. 6. Zusatz. Ebenso ist, wenn $A : B < C : D$, auch $D : C < B : A$, oder $B : A > D : C$; denn alsdann ist $C : D > A : B$. Und allgemein, wenn man dasjenige Verhältnifs, gröfser als welches ein anderes vermöge V, def. 7. ist, kleiner als dieses nennt; so ist es leicht, das von den gröfseren Verhältnissen Vorgetragene auch auf die kleineren anzuwenden, wenn man durch Versetzung der Verhältnisse dasjenige, kleiner als welches das andere ist, als das gröfsere setzt.

§. 7. Satz II. Von sechs Gröfsen A, B; C, D; E, F, von welchen die erste A zu der zweiten B ein gröfseres Verhältnifs hat, als die dritte C zu der vierten D und die dritte C zu der vierten D gleichfalls ein gröfseres Verhältnifs hat, als die fünfte E zu der sechsten F, wird auch die erste A zu der zweiten B in gröfserem Verhältnifs stehen, als die fünfte E zu der sechsten F.

Kurz ausgedrückt: wenn $A : B > C : D$,
und $C : D > E : F$;
so ist auch $A : B > E : F$.

Beweis. Da $A : B > C : D$, und $C : D > E : F$,
so sey nach V, def. 7. $mA > nB$, $mC \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} nD$, und $pC > qD$,
$pE \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} qF$, indem m, n, p, q beständig ganze Zahlen bezeichnen:

so ist auch (§. 2.) $p.mC \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} p.nD$, $m.pC > m.qD$,

oder $p.nD \left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\} p.mC$, $p.mC > m.qD$ (§. 4.)

und daher $p.nD > m.qD$, und (§. 3.) $p.n > m.q$,
und folglich auch (§. 3.) $p.nB > m.qB$;
und da $mA > nB$, u. dah. auch $p.mA > p.nB$ (§. 2.);
so ist umsomehr $p.mA > m.qB$,
oder $m.pA > m.qB$ (§. 4.) und $pA > qB$ (§. 2.);
und da überdiefs $pE \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} qF$;
so ist vermöge V, def. 7. der Satz richtig.

§. 8. Scholion. Diesen Satz haben einige Herausgeber der *Elemente* dem 13ten des V. Buches als Zusatz beigefügt; und zwar setzt Clavius ausdrücklich im Schol. zu V, 13. hinzu: dafs sich derselbe auf die nämliche Art beweisen lasse, wie V, 13. selbst bewiesen worden sey; was sich jedoch nicht so verhält.

§. 9. Satz III. Vier Gröfsen A, B, C, D, wovon je zwei A und B, C und D einander gleich sind, sind geometrisch proportionirt.

Das ist wenn $A=B$ und $C=D$, so ist $A : B = C : D$.

Beweis. Nimmt man beliebige Gleichvielfache mA, mC der Gröfsen A, C, und nB, nD der Gröfsen B, D;

so wird, jenachdem $mA \left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\} nB$, auch $mC \left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\} nD$ (§. 2. 3.) seyn;

das ist, es wird immer zugleich $mA \left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\} nB$, und $mC \left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\} nD$ seyn;

wornach (verm. V, def. 7.) $A : B = C : D$.

§. 10. Satz IV. Wenn von vier Gröfsen A, B, C, D entweder die erste A gleich der zweiten B, und die dritte C kleiner als die vierte D ist; oder die erste A gröfser als die zweite B, und die dritte C nicht gröfser, als die vierte D ist; so hat die erste A zu der zweiten B ein gröfseres Verhältnifs, als die dritte C zu der vierten D.

Kurz ausgedrückt:

wenn $A=B$ und $C<D$, oder wenn $A>B$ und $C \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} D$,

so ist $A : B > C : D$ oder (§. 5.) umgekehrt $B : A < D : C$.

Beweis. 1stens. Wenn $A=B$ und $C<D$, so sey $C+E=D$;

so ist $A : B = C+E : D$ (§. 9.),
und da $C+E : D > C : D$ (V, 8.);
so ist auch $A : B > C : D$ (V, 13.).

2tens. Daher ist auch, wenn $A>B$ und $C=D$;
oder $D=C$ und $B<A$:
vermöge des so eben Bewiesenen $D : C > B : A$, oder (§. 5.) $A : B > C : D$.

3tens. Wenn $A>B$, und $C<D$, so sey $A=B+E$, $C+F=D$;

so ist	$A : B > A : B+E$ (V, 8.),
und	$A : B+E = C+F : D$ (§. 9.);
folglich	$A : B > C+F : D$ (V, 13.):
und da auch	$C+F : D > C : D$ (V, 8.).
so ist	$A : B > C : D$ (§. 7.).

§. 11. Satz V. Umgekehrt, wenn von vier Gröſsen A, B, C, D, von welchen die erste A zu der zweiten B ein gröſseres Verhältniſs hat, als die dritte C zu der vierten D, die erste A nicht gröſser als die zweite B ist, so ist die dritte C kleiner als die vierte D: ist aber die dritte C nicht kleiner als die vierte D, so ist die erste A gröſser als die zweite B.

Kurz ausgedrückt: wenn $A : B > C : D$,

so ist $C < D$ wenn $A \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} B$; und $A > B$, wenn $C \left\{ \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \right\} D$.

Beweis. 1stens. Wenn $A : B > C : D$ und $A \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} B$
oder $B \left\{ \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \right\} A$;

so ist	$B : B \left\{ \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \right\} A : B$ (V, 7. 8.);
daher	$B : B > C : D$ (V, 13. und §. 7.);
da aber	$B : B = D : D$ (§. 9.)
so ist	$D : D > C : D$ (V, 13.),
und daher	$D > C$, oder $C < D$ (V, 10.).

2tens. Wenn $A : B > C : D$, und $C \left\{ \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \right\} D$;

so ist	$C : D \left\{ \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \right\} D : D$ (V, 7. 8.),
und daher	$A : B > D : D$ (V, 13. u. §. 7.).
Da aber	$D : D = B : B$ (§. 9.);
so ist auch	$A : B > B : B$ (V, 13.),
und folglich	$A > B$ (V, 10.).

§. 12. Satz VI. Gleichvielfache, oder gleich-aliquote Theile der Glieder eines gröſseren Verhältnisses haben auch ein gröſseres Verhältniſs unter sich, als die Glieder eines kleineren Verhältniſs, oder Gleichvielfache, oder gleich-aliquote Theile derselben; und ebenso haben die Glieder eines gröſseren Verhältnisses ein gröſseres Verhältniſs zu einander, als Gleichvielfache,

oder gleich-aliquote Theile der Glieder eines kleineren Verhältnisses.

Das ist: wenn $A : B > C : D$,

so ist auch $mA : mB > C : D$,

$A : B > nC : nD$,

und $mA : mB > nC : nD$; und umgekehrt;

indem m und n beliebige ganze Zahlen bezeichnen.

Beweis. 1stens. Da $mA : mB = A : B$ (V, 15.),

so ist, wenn $A : B > C : D$;

auch $mA : mB > C : D$ (V, 13.).

Und ebenso, wenn $mA : mB > C : D$,

auch $A : B > C : D$ (V, 13.).

2tens. Ebenso wird, da $nC : nD = C : D$ (V, 15.),

wenn wiederum $A : B > C : D$,

auch $A : B > nC : nD$ (V, 13.).

Und wenn $A : B > nC : nD$,

auch $A : B > C : D$ (V, 13.) seyn.

3tens. Endlich, wenn $A : B > C : D$,

so ist $mA : mB > C : D$ (verm. d. Bew. nr. 1.)

und daher auch $mA : mB > nC : nD$ (verm. d. Bew. nr. 2.)

Umgekehrt wenn $mA : mB > nC : nD$,

so ist auch $A : B > nC : nD$ (nr. 1.),

und daher $A : B > C : D$ (nr. 2.).

§. 13. **Zusatz 1.** Wenn daher $A : B > C : D$;

so ist auch

$$\left.\begin{matrix} A : B \\ \frac{1}{m}A : \frac{1}{m}B \\ \frac{p}{m}A : \frac{p}{m}B \end{matrix}\right\} > \frac{q}{n}C : \frac{q}{n}D;$$

und

$$\frac{p}{m}A : \frac{p}{m}B > \left\{\begin{matrix} C : D \\ \frac{1}{n}C : \frac{1}{n}D. \end{matrix}\right.$$

§. 14. **Zusatz 2.** Und wenn wiederum $A : B > C : D$;

so ist auch

$$mA : mB > \left\{\begin{matrix} \frac{1}{n}C : \frac{1}{n}D \\ \frac{q}{n}C : \frac{q}{n}D, \end{matrix}\right.$$

und

$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{m}A : \frac{1}{m}B \\ \frac{p}{m}A : \frac{p}{m}B \end{matrix}\right\} > nC : nD.$$

§. 15. **Satz VII.** Wenn von vier Gröfsen A, B, C, D, die erste A zu der zweiten B ein gröfseres Verhältnifs hat, als die dritte C zu der vierten D: und man nimmt von der ersten A und der dritten C Gleichvielfache, und ebenso auch Gleichvielfache von der zwei-

ten B und der vierten D; so wird auch das Vielfache der ersten A zu der zweiten B, oder zu ihrem Vielfachen, ein gröfseres Verhältnifs haben, als das Vielfache der dritten C zu der vierten D, oder zu ihrem Vielfachen; und auch die erste A wird zu dem Vielfachen der zweiten B in gröfserem Verhältnifs stehen, als die dritte C zu dem Vielfachen der vierten D.

Kurz ausgedrückt: wenn $A : B > C : D$;

so ist auch $mA : B > mC : D$

$A : nB > C : nD$,

$mA : nB > mC : nD$,

indem m und n beliebige ganze Zahlen bezeichnen.

Beweis. Da $A : B > C : D$ (Voraussz.), so ist $pA > qB$, $pC \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} qD$ (V, def. 7); folglich ist auch (§. 2.)

$$m.pA > m.qB,\ m.pC \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} m.qD,$$

$$n.pA > n.qB,\ n.pC \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} n.qD,$$

$$m.n.pA > m.n.qB,\ m.n.pC \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} m.n.qD;$$

oder (§. 4.) $$p(mA) > m.qB,\ p(mC) \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} m.qD,$$

$$n.pA > q(nB),\ n.pC \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} q(nD),$$

$$n.p(mA) > m.q(nB),\ n.p(mC) \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} m.q(nD);$$

und da Gleichvielfache der Gröfsen pA, pC; qB, qD, auch Gleichvielfache der Gröfsen A, B; C, D selbst, und ebenso Gleichvielfache der Gröfsen $p(mA)$, $p(mC)$; $q(nB)$, $q(nD)$, auch Gleichvielfache der Gröfsen mA, mC; nB, nD (V, 3.) sind; so ist der Satz vermöge V, def. 7. richtig.

§. 16. Satz VIII. Umgekehrt, wenn von vier Gröfsen A, B, C, D, die erste A zu der zweiten B ein gröfseres Verhältnifs hat, als die dritte C zu der vierten D: und man nimmt gleich-aliquote Theile der ersten A und der dritten C, und gleich-aliquote Theile der zweiten B und der vierten D; so wird auch der aliquote Theil der ersten A zu der zweiten B, oder zu ihrem aliquoten Theile, ein gröfseres Verhältnifs haben, als der aliquote Theil der dritten C zu der vierten D, oder zu ihrem aliquoten Theile; und auch die erste A wird zu dem aliquoten Theile der zweiten B in gröfserem Verhältnifs stehen, als die dritte C zu dem aliquoten Theile der vierten D.

Kurz ausgedrückt: Wenn $A : B > C : D$

so ist auch $\frac{A}{m} : B > \frac{C}{m} : D,$

$A : \frac{B}{n} > C : \frac{D}{n},$

$\frac{A}{m} : \frac{B}{n} > \frac{C}{m} : \frac{D}{n}$

Oder, wenn $mA : B > mC : D,$

oder $A : nB > C : nD,$

oder $mA : nB > mC : nD;$

so ist auch $A : B > C : D.$

Beweis. Da $mA : B > mC : D$, $A : nB > C : nD$, $mA : nB > mC : nD$ (Vorauss.); so sey (V, def. 7.)

$$p(mA) \gtrless qB \quad p(mC) \left\{\begin{matrix}=\\<\\>\end{matrix}\right\} qD,$$

$$pA \gtrless q(nB), \quad pC \left\{\begin{matrix}=\\<\\>\end{matrix}\right\} q(nD),$$

$$p(mA) \gtrless q(nB), \quad p(mC) \left\{\begin{matrix}=\\<\\>\end{matrix}\right\} q(nD);$$

oder (V, 3.) $(p,m)A \gtrless qB, \quad (p,m)C \left\{\begin{matrix}=\\<\\>\end{matrix}\right\} qD,$

$$pA \gtrless (q,n)B, \quad pC \left\{\begin{matrix}=\\<\\>\end{matrix}\right\} (q,n)D,$$

$$(p,m)A \gtrless (q,n)B, (p,m)C \left\{\begin{matrix}=\\<\\>\end{matrix}\right\} (q,n)D;$$

folglich ist (V, def. 7.) $A : B > C : D.$

§. 17. Zus. 1. Hiernach, und vermöge §. 15. ist auch, wenn $A : B > C : D$:

$$\frac{p}{m}A : \left\{\begin{matrix}B\\ \frac{1}{n}B\\ \frac{q}{n}B\end{matrix}\right\} > \frac{p}{m}C : \left\{\begin{matrix}D,\\ \frac{1}{n}D,\\ \frac{q}{n}D;\end{matrix}\right.$$

und

$$\left.\begin{matrix}A\\ \frac{1}{m}A\end{matrix}\right\} : \frac{q}{n}B > \left\{\begin{matrix}C\\ \frac{1}{m}C\end{matrix}\right\} : \frac{q}{n}D.$$

§. 18. Zus. 2. Ebenso ist auch

$$mA : \left\{\begin{matrix}\frac{1}{n}B\\ \frac{q}{n}B\end{matrix}\right\} > mC : \left\{\begin{matrix}\frac{1}{n}D,\\ \frac{q}{\mu}D;\end{matrix}\right.$$

und

$$\left.\begin{matrix}\frac{1}{m}A\\ \frac{p}{m}A\end{matrix}\right\} : nB > \left\{\begin{matrix}\frac{1}{m}C\\ \frac{p}{m}C\end{matrix}\right\} : nD.$$

§. 19. **Satz IX.** Wenn von vier Gröfsen A, B, C, D, die erste A zu der zweiten B ein gröfseres Verhältnifs hat, als die dritte C zu der vierten D; so wird auch die Summe der beiden ersteren A, B zu der zweiten B ein gröfseres Verhältnifs haben, als die Summe der beiden letzteren C, D zu der vierten D.

Kurz ausgedrückt: Wenn $A : B > C : D$,
so ist **verbunden** (*componendo*) $A+B : B > C+D : D$.

Beweis. Es sey $mA > nB$, $mC \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} nD$ (Vorauss. und V, def. 7.): so ist, wenn man mB, mD hinzufügt

$$mA+mB > nB+mB,\quad mC+mD \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} nD+mD;$$

und da (V, 1.) $mA+mB = m(A+B)$, $mC+mD = m(C+D)$,
und (V, 2.) $nB+mB = (n+m)B$, $nD+mD = (n+m)D$,
und daher $m(A+B) > (n+m)B$, $m(C+D) \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} (n+m)D$;

so ist der Satz vermöge V, def. 7. richtig.

§. 20. **Zus. 1.** Auf andere Weise läfst sich dieser Satz auch so ausdrücken: Wenn der Unterschied zweier Gröfsen zu der kleineren von denselben in gröfserem Verhältnifs steht, als der Unterschied zweier anderen Gröfsen zu der kleineren von denselben; so wird auch die gröfsere von den beiden ersteren zu der kleineren von denselben in gröfserem Verhältnifs stehen, als die gröfsere von den letzteren zu der kleineren von diesen.

Denn wenn $A-B : B > C-D : D$;
so ist $A-B+B : B > C-D+D : D$,
das ist $A : B > C : D$.

§. 21. **Zus. 2.** Unter der nämlichen Voraussetzung, wie in §. 19., wird auch die Summe der beiden ersteren zu der ersten von denselben ein kleineres Verhältnifs haben, als die Summe der beiden letzteren zu der dritten.

Denn wenn $A : B > C : D$;
so ist umgekehrt (*inverse*) $B : A < D : C$ (§. 5.),
und daher $A+B : A < C+D : C$ (§. 19.)
oder $A : A+B > C : C+D$ (§. 5.).

§. 22. **Satz X.** Wenn von vier Gröfsen A, B, C, D, die erste A zu der zweiten B ein gröfseres Verhältnifs hat, als die dritte C zu der vierten D, und die dritte C ist gröfser als die vierte D, und daher auch (§. 11.) die erste A gröfser als die zweite B; so wird der Ueberschufs der ersten A über die zweite B zu dieser B gleichfalls ein gröfseres Verhältnifs haben, als

der Ueberschuſs der dritten C über die vierte D zu dieser vierten D.

Kurz ausgedrückt: Wenn $A : B > C : D$ u. $C > D$, und daher auch $A > B$ (§. 11.);
so ist auch getrennt (*dividendo*) $A-B : B > C-D : D$
oder umgekehrt $B : A-B < D : C-D$.

Beweis. Es sey $mA > nB$, $mC \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} nD$ (Voraussetzung V, def. 7.); so ist (§. 2.), weil $D < C$, auch $nD < nC$, folglich aus dem Gleichen oder um soviel mehr $mC < nC$, und daher $m < n$, und $nB > mB$, $nD > mD$ (§. 3.); und $mC > mD$ (§. 2.).

Nimmt man nun mB, mD hinweg,

so ist $mA-mB > nB-mB$, $mC-mD \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} nD-mD$;

und da nach V, 5. $mA-mB = m(A-B)$, $mC-mD = m(C-D)$,
und nach V, 6. $nB-mB = (n-m)B$, $nD-mD = (n-m)D$;

so ist $m(A-B) > (n-m)B$, $m(C-D) \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} (n-m)D$.

Ist nun $n-m$, welches eine ganze Zahl ist, > 1, so ist der Satz vermöge V, def. 7. richtig; ist aber $n-m = 1$, so ist (§. 2.)

$$2m(A-B) > 2B,\quad 2m(C-D) \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} 2D;$$

und da Gleichvielfache der Gröſsen $m(A-B)$, $m(C-D)$, Gleichvielfache der Gröſsen $A-B$, $C-D$ selbst sind (V, 5.), so ist der Satz wiederum vermöge V, def. 7. richtig.

§. 23. Zus. Dieſs läſst sich auch so ausdrücken: Wenn die Summe zweier Gröſsen zu einer von beiden ein gröſseres Verhältniſs hat, als die Summe zweier anderen zu einer von diesen beiden; so hat auch zu derjenigen von der ersteren, welche das Hinterglied des gröſseren Verhältnisses ausmacht, die andere von diesen ein gröſseres Verhältniſs, als die andere von den letzteren zu derjenigen von diesen, welche das Hinterglied des kleineren Verhältnisses ist.

Denn wenn $A+B : B > C+D ; D$,
so ist $A+B-B : B > C+D-D : D$,
das ist $A : B > C : D$.

§. 24. Satz XI. Wenn von vier Gröſsen A, B, C, D, die erste A zu der zweiten B ein gröſseres Verhältniſs hat, als die dritte C zu der vierten D, und es ist die dritte C gröſser als die vierte D, und daher (§. 11.) auch die erste A gröſser als die zweite B; so hat auch die erste A zu ihrem Ueberschuſs über die

zweite B ein kleineres Verhältnifs, als die dritte C zu ihrem Ueberschufs über die vierte D,

Kurz ausgedrückt: wenn $A : B > C : D$, und $C > D$, folglich auch (§. 11.) $A > B$,
so ist zurückkehrend (*convertendo*)

$$A : A-B < C : C-D,$$

oder umgekehrt

$$A-B : A > C-D : C.$$

Beweis. Da $A : B > C : D$ (Voraus.);
so ist getrennt $A-B : B > C-D : D$ (§. 22.),
und daher $A-B+B : A-B < C-D+D : C-D$ (§. 21.),
das ist $A : A-B < C : C-D$,
oder $A-B : A > C-D : C$ (§. 5.).

§. 25. **Zus. 1.** Oder auch: Wenn die Summe zweier Gröfsen zu einer von denselben ein gröfseres Verhältnifs hat, als die Summe zweier anderen zu einer von diesen; so hat die Summe der beiden ersteren zu der anderen von diesen ein kleineres Verhältnifs, als die Summe der beiden letzteren zu der anderen von diesen.

Denn wenn $A+B : B > C+D : D$,
so ist $A+B : A+B-B < C+D : C+D-D$,
das ist $A+B : A < C+D : C$;
was auch aus §. 23. 21. folgt.

§. 26. **Zus. 2.** Allgemein, wenn von vier Gröfsen, wovon die erste zu der zweiten ein gröfseres Verhältnifs hat, als die dritte zu der vierten, die dritte gröfser ist, als die vierte, und daher auch (§. 11.) die erste gröfser als die zweite; so hat der Unterschied der ersteren zu einer von diesen beiden ein gröfseres Verhältnifs, als der Unterschied der letzteren zu einer von diesen beiden, nämlich zu derjenigen, welche der in dem gröfseren Verhältnifs angenommenen der Ordnung nach entspricht.

§. 27. **Zus. 3.** Ebenso, wenn der Unterschied zweier Gröfsen zu der kleineren von denselben ein gröfseres Verhältnifs hat, als der Unterschied zweier anderen zu der kleineren von diesen; so wird auch der Unterschied der ersteren zu der gröfseren von denselben in gröfserem Verhältnifs stehen, als der Unterschied der beiden letzteren zu der gröfseren von denselben.

Denn wenn $A-B : B > C-D : D$,
so ist $A-B : A-B+B > C-D : C-D+D$ (§. 21.),
das ist $A-B : A > C-D : C$;
was auch aus §. 20. 24. folgt.

§. 28. Satz XII. Wenn von vier Gröfsen A, B, C, D, die erste A zu der zweiten B ein gröfseres Verhältnifs hat, als die dritte C zu der vierten D, und die zweite B ist gröfser als die erste A; und folglich auch (§. 11.) die vierte D gröfser als die dritte C; so hat eine von den beiden ersteren zum Ueberschufs der zweiten B über die erste A ein gröfseres Verhältnifs, als die homologe von den letzteren zum Ueberschufs der vierten D über die dritte C.

Kurz ausgedrückt:

wenn $A : B > C : D$, und $B > A$, und daher (§. 11.) auch $D > C$,

so ist $\frac{A}{B} : B-A > \begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix} : D-C$, und umgekehrt.

Beweis. Da $A : B > C : D$ (Voraus.)

oder $D : C > B : A$ (§. 5.), und $B > A$ (Voraus.),

so ist getrennt $D-C : C > B-A : A$ (§. 22.),

und auch $D-C : D > B-A : B$ (§. 24.),

wornach gleichfalls (§. 5.)

$A : B-A > C : D-C$,

und $B : B-A > D : D-C$.

§. 29. Zus. 1. Wenn der Unterschied zweier Gröfsen zu der gröfseren von denselben in gröfserem Verhältnifs steht, als der Unterschied zweier andern Gröfsen zu der gröfseren von diesen; so steht auch die gröfsere von beiden ersteren zu der kleineren von diesen in gröfserem Verhältnifs, als die gröfsere der beiden letzteren zu der kleineren von diesen.

Denn wenn $A-B : A > C-D : C$,

so ist $A : A-(A-B) > C : C-(C-D)$ (§. 28.)

das ist $A : B > C : D$.

§. 30. Zus. 2. Ebenso wird auch, unter derselben Voraussetzung wie in §. 29., der Unterschied der beiden ersteren zu der kleineren von diesen in gröfserem Verhältnifs stehen, als der Unterschied der letzteren zu der kleineren von diesen.

Denn wenn $A-B : A > C-D : C$,

so ist $A-B : A-(A-B) > C-D : C-(C-D)$ (§. 28.),

das ist $A-B : B > C-D : D$;

was auch aus Zus. 1. und §. 22. folgt.

§. 31. Satz XIII. Wenn von dreien Gröfsen A, B, C, und ebenso vielen anderen D, E, F, entweder die erste A zu der zweiten B einerlei Verhältnifs hat, wie die vierte D zu der fünften E, die zweite B aber zu der dritten C ein gröfseres Verhältnifs hat, als die fünfte E

zu der sechsten F; oder die erste A zu der zweiten B ein gröfseres, als die vierte D zu der fünften E, die zweite B hingegen zu der dritten C einerlei Verhältnifs hat, wie die fünfte E zu der sechsten F; oder sowohl die erste A zu der zweiten B ein gröfseres als die vierte D zu der fünften E, als auch die zweite B zu der dritten C ein gröfseres als die fünfte E zu der sechsten F; so hat auch aus dem Gleichen (*ex aequo*) die erste A zu der dritten C ein gröfseres Verhältnifs, als die vierte D zu der sechsten F.

Kurz ausgedrückt, wenn

entweder $A : B = D : E$
und $B : C > E : F$;
oder $A : B > D : E$
und $B : C = E : F$;
oder sowohl $A : B > D : E$
als auch $B : C > E : F$;

so ist aus dem Gleichen $A : C > D : F$.

Beweis. 1) Wenn $A : B = D : E$, u. $B : C > E : F$,

so sey $mB > nC$, $mE \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} nF$ (V, def. 7.).

Da nun $nC < mB$, so ist $A : nC > A : mB$ (V, 8.),
und da $A : B = D : E$ (Vorauss.), folgl. $A : mB = D : mE$ (V, 4.),
so ist auch $A : nC > D : mE$ (V, 13.):
und da $mE \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} nF$, so ist auch $D : mE \left\{ \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \right\} D : nF$ (V, 7. 8.),
und daher $A : nC > D : nF$
(V, 13. §. 7.).
folglich $A : C > D : F$ (§. 12.).

2) Wenn $A : B > D : E$, und $B : C = E : F$,
so ist umgekehrt (V, 4. §. 5.) $C : B = F : E$
und $B : A < E : D$;
folglich aus dem Gleichen $C : A < F : D$ verm. des Bew. Nr. 1.
oder umgekehrt $A : C > D : F$ (§. 5.).

3) Wenn sowohl $A : B > D : E$, als auch $B : C > E : F$,

so sey $mA > nB$, $mD \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} nE$, und $pB > qC$, $pE \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} qF$ (V, def. 7.)
so ist auch $p.mA > p.nB$, $p.mD \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} p.nE$, $n.pB > n.qC$, $n.pE \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} n.qF$ (§. 2.),
oder (§. 4.)
$p.mA > p.nB$, und $p.nB > n.qC$,
und ebenso $p.mD \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} p.nE$, und $p.nE \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} n.qF$;
und daher
$p.mA > n.qC$; $p.mD \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} n.qF$.

Da nun Gleichvielfache der Gröſsen mA, mD; qC, qF auch Gleichvielfache der Gröſsen A, D; C, F sind (V, 3.), so ist der Satz vermöge V, def. 7. richtig.

§. 32. Satz XIV. Wenn von dreien Gröſsen A, B, C, und ebenso vielen anderen D, E, F, zerstreut (*perturbate*) entweder die erste A zu der zweiten B einerlei Verhältniſs hat, wie die fünfte E zu der sechsten F, dagegen die zweite B zu der dritten C ein gröſseres, als die vierte D zu der fünften E; oder die erste A zu der zweiten B ein gröſseres Verhältniſs hat, als die fünfte E zu der sechsten F, und die zweite B zu der dritten C einerlei oder gleichfalls ein gröſseres Verhältniſs hat, als die vierte D zu der fünften E; so wird aus dem Gleichen auch die erste A zu der dritten C ein gröſseres Verhältniſs haben, als die vierte D zu der sechsten F.

Kurz ausgedrückt: wenn

entweder	$A : B = E : F$
und	$B : C > D : E$;
oder	$A : B > E : F$
und	$B : C = D : E$;
oder sowohl	$A : B > E : F$
als auch	$B : C > D : E$;

so ist auch aus dem Gleichen $A : C > D : F$.

Beweis. 1) Wenn $A : B = E : F$, und $B : C > D : E$;

so sey $mB > nC$, $mD \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} nE$ (V, def. 7.);

so ist $nE : mF \left\{ \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \right\} mD : mF$ (V, 7. 8.),

und da $A : B = E : F$ (Voraus.) folgl. auch $nA : mB = nE : mF$ (V, 4.);

so ist auch $nA : mB \left\{ \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \right\} mD : mF$ (V, 11. 13.);

da aber $mB > nC$, so ist $nA : nC > nA : mB$ (V, 8.),

und daher $nA : nC > mD : mF$ (V, 13. und §. 7.);

folglich $A : C > D : F$ (§. 12.).

2) Wenn $A : B > E : F$, und $B : C = D : E$,

so ist umgekehrt $C : B = E : D$ (V, 4. Zus.)

und $B : D < F : E$ (§. 5.),

folglich verm. d. Bew. nr. 1. $C : A < F : D$,

oder umgekehrt $A : C > D : F$ (§. 5.).

3) Wenn $A : B > E : F$, und $B : C > D : E$.

so sey

$$mA > nB, mE \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} nF, \quad \text{und} \quad pB > qC, pD \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} qE \text{ (V, def. 7.)}$$

so ist auch

$$p.mA > p.nB, \qquad n.pB, \text{ oder } p.nB > n.qC,$$

und ebenso

$$q.mE \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} q.nF \text{ od. } n\,qF, m.pD \text{ od. } p.mD \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} m.qE \text{ od. } q.mE \text{ (§. 2. 4.)};$$

und daher

$$p.mA > n.qC. \qquad p.mD \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} n.qF;$$

folglich, da Gleichvielfache der Gröfsen mA, mD und qC, qF auch Gleichvielfache der Gröfsen A, D; C, F sind (V, 3.), so ist vermöge V, def. 7. $A : C > D : F$.

§. 33. Satz XV. Wenn von sechs Gröfsen A, B, C; D, E, F die erste A zu der zweiten B entweder einerlei, oder gröfseres Verhältnifs hat, als die dritte C zu der vierten D, die fünfte E aber zu der zweiten B ein gröfseres, als die sechste F zu der vierten D; so wird auch die Summe der ersten A und der fünften E zu ebendieser zweiten B ein gröfseres Verhältnifs haben, als die Summe der dritten C und der sechsten F zu ebendieser vierten D.

Kurz ausgedrückt; wenn $A : B \left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\} C : D$,

und $E : B > F : D$;

so ist $A+E : B > C+F : D$.

Beweis 1) Wenn $A : B = C : D$ u. $E : B > F : D$,

oder umgekehrt $B : E < D : F$ (§. 5.),

so ist aus dem Gleichen $A : E < C : F$ (§. 31.),

folglich $A+E : A > C+F : C$ (§. 21.),

und da $A : B = C : D$ (Voraus.)

so ist auch aus d. Gleichen $A+E : B > C+F : D$ (§. 31.).

2) Wenn $A : B > C : D$, und $E : B > F : D$,

so sey $mA > nB$, $mC \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} nD$, u. $pE > qB, pF \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} qD$;

so ist auch $p.mA > p.nB$, $p.mC \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} p.nD$ (§. 2.),

u. $m.pE$ od. $p.mE > m.qB$, $m.pF$ od. $p.mF \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} m.qD$ (§. 2. 4.);

folgl. auch $p.mA+p.mE > p.nB+m.qB$, $p.mC+p.mF \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} p.nD+m.qD$, oder (V, 3. 1. 2.)

$p.m(A+E) > (p.n+m.q)B$, u. ebenso $p.m(C+F) \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} (p.n+m.p)D$:

und daher auch $A+E : B > C+F : D$ vermöge V, def. 7.

§. 34. Zus. Oder auch: wenn

$$A : B \left\{ \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \right\} C : D,$$

und $E - A : B > F - C : D$;

so ist $A + E - A : B > C + F - C : D$

das ist $E : B > F : D$.

§. 35. Satz XVI. Wenn von sechs Gröfsen A, B, C; D, E, F, die erste A zu der zweiten B einerlei oder kleineres Verhältnifs hat, als die dritte C zu der vierten D, die fünfte E aber zu der zweiten B ein gröfseres, als die sechste F zu der vierten D; und die erste A ist gröfser als die fünfte E, so wird auch die dritte C gröfser seyn, als die sechste F; ist aber die dritte C kleiner als die sechste F, so wird auch die erste A kleiner als die fünfte E seyn.

Kurz ausgedrückt: wenn

$$A : B \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} C : D, \text{ und } E : B > F : D,$$

so ist $C > F$, wenn $A > E$; und $A < E$, wenn $C < F$.

Beweis. Da $A : B \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} C : D$, u. $E : B > F : D$ (Voraus.)

oder umgekehrt $B : E < D : F$ (§. 5.),

so ist auch aus d. Gleichen $A : E < C : F$ (§. 31.),

oder $E : A > F : C$ (§. 5.);

wornach vermöge §. 11. der Satz richtig ist.

§. 36. Satz XVII. Wenn von vier Gröfsen A, B, C, D die erste A zu der zweiten B einerlei oder kleineres Verhältnifs hat, als die dritte C zu der vierten D, und eine fünfte E zu der zweiten B ein gröfseres Verhältnifs hat, als eine sechste F zu der vierten D, und es ist die erste A gröfser als die fünfte E, und daher (§. 35.) auch die dritte C gröfser als die sechste F; so hat der Ueberschufs der ersten A über die fünfte E zu der zweiten B ein kleineres Verhältnifs, als der Ueberschufs der dritten C über die sechste F zu der vierten D; ist aber die dritte C kleiner als die sechste F, und daher auch (§. 35.) die erste A kleiner als die fünfte E, so ist der Ueberschufs der fünften E über die erste A zu der zweiten B in gröfserem Verhältnifs, als der Ueberschufs der sechsten F über die dritte C zu der vierten D,

Kurz ausgedrückt:

wenn $A : B \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} C : D$, und $E : B > F : D$,

so ist $A-E : B < C-F : D$, wenn $A > E$, u. dah. (§. 35.) $C > F$,

hingegen $E-A : B > F-C : D$, wenn $C < F$, - - - - - - $A < E$.

Beweis. 1) Wenn $A : B \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} C : D$, u. $E : B > F : D$, und $A > E$;

so ist umgekehrt $B : E < D : F$ (§. 30.),

folglich aus dem Gleichen $A : E < C : F$ (§. 31.),

und, weil $A > E$, $A-E : A < C-F : C$ (§. 24.):

und da $A : B \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} C : D$ (Voraus.),

so ist auch aus d. Gleichen $A-E : B < C-F : D$ (§. 31.).

2) Wenn $E : B > F : D$, u. $A : B \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} C : D$, und $C < F$;

so ist auch umgekehrt $B : A \left\{ \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \right\} D : C$ (V, 4. Zus. u. §. 5.),

daher aus dem Gleichen $E : A > F : C$ (§. 31.)

und daher $E-A : E > F-C : F$ (§. 22.), weil $C < F$;

und da $E : B > F : D$ (Voraus.),

so ist auch aus d. Gleichen $E-A : B > F-C : D$ (§. 31.).

§. 37. Zus. 1. Dieſs läſst sich auch so ausdrücken:

Wenn $A+E : B \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} C+F : D$,

und $A : B > C : D$;

so ist $E : B < F : D$.

Wenn aber $A : B \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} C : D$,

und $A+E : B > C+F : D$;

so ist $E : B > F : D$.

§. 38. Zus. 2. Daher ist auch, wenn

$A-E : B > C-F : D$,

und $A : B \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} C : D$;

so ist $A-(A-E) : B < C-(C-D) : D$ (§. 36. nr. 1.)

oder $E : B < F : D$.

Und wenn $A : B > C : D$,

und $A-E : B \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} C-F : D$;

so ist $A-(A-E) : B > C-(C-F) : D$ (§. 36. nr. 2.),

das ist $E : B > F : D$.

§. 39. Satz XVIII. Wenn von vier Gröfsen A, B, C, D die erste A zu der zweiten B ein gröfseres Verhältnifs hat, als die dritte C zu der vierten D, und es ist die dritte C gröfser als die vierte D, und demnach (§. 11.) auch die erste A gröfser als die zweite B; so hat die Summe der ersteren zu ihrem Unterschiede ein kleineres Verhältnifs, als die Summe der letzteren zu deren Unterschiede; ein gröfseres hingegen, wenn die erste A kleiner als die zweite B, und daher auch (§. 11.) die dritte C kleiner als die vierte D ist.

Das ist: wenn $A : B > C : D$,
und es ist $C > D$, und daher auch (§. 11.) $A > B$;
so ist $A+B : A-B < C+D : C-D$;
wenn aber $A < B$, und daher auch (§. 11.) $C < D$;
so ist $A+B : B-A > C+D : D-C$.

Beweis. Da $A : B > C : D$ (Vorauss.), so ist
1) $A+B : A < C+D : C$ (§. 21.),
und, wenn $C > D$, zurückkehrend
$A : A-B < C : C-D$ (§. 24.);
dah. aus d. Gleichen $A+B : A-B < C+D : C-D$ (§. 31.).
2) Auch ist $A+B : B > C+D : D$ (§. 19.),
und, wenn $A < B$, $B : B-A > D : D-C$ (§. 28.);
wornach wieder aus dem Gleichen
$A+B : B-A > C+D : D-C$ (§. 31.).

§. 40. Satz XIX. Umgekehrt, wenn die Summe zweier Gröfsen A, B zu ihrem Unterschiede ein gröfseres Verhältnifs hat, als die Summe zweier andern Gröfsen C, D zu ihrem Unterschiede; so hat die gröfsere von den ersteren zu der kleineren von denselben ein kleineres Verhältnifs, als die gröfsere von den letzteren zu der kleineren von diesen.

Das ist: wenn $A+B : A-B > C+D : C-D$,
so ist $A : B < C : D$.

Beweis. Da $A+B : A-B > C+D : C-D$ (Vorauss.)
so ist $A+B+A-B : A+B-(A-B) < C+D+C-D : C+D-(C-D)$ (§. 39.)
das ist $2A : 2B < 2C : 2D$
und daher $A : B < C : D$ (§. 12.).

§. 41. Satz XX. Wenn von vier gleichartigen Gröfsen A, B, C, D die erste A der dritten C gleich, und die zweite B kleiner als die vierte D ist; oder wenn die erste A gröfser als die dritte C, und die zweite B nicht gröfser, als die vierte D ist; so hat die erste A zu der zweiten B ein gröfseres Verhältnifs als die dritte C zu der vierten D.

Kurz ausgedrückt:

wenn $A=C$ und $B<D$, oder wenn $A>C$ und $B\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}D$,

so ist $A:B>C:D$.

Beweis. 1) Wenn $A=C$, und $B<D$;

so ist	$A:B>A:D$	(V, 8.),
und	$A:D=C:D$	(V, 7.)
folglich	$A:B>C:D$	(V, 13.).

2) Wenn $A>C$, und $B\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}D$,

so ist	$A:B>C:B$	(V, 8.),
und	$C:B\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}C:D$	(V, 7. 8.);
folglich	$A:B>C:D$	(V, 13. u. §. 7.).

§. 42. Satz XXI. Umgekehrt, wenn von vier gleichartigen Gröfsen A, B, C, D die erste A zu der zweiten B ein gröfseres Verhältnifs hat, als die dritte C zu der vierten D, und die erste A nicht gröfser ist, als die dritte C; so ist die zweite kleiner als die vierte D; und wenn die zweite B nicht kleiner als die vierte D ist, so ist die erste A gröfser als die dritte C.

Kurz ausgedrückt: wenn $A:B>C:D$, so ist $B<D$, wenn $A\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}C$, und $A>C$, wenn $B\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}D$.

Beweis. 1) Wenn $A\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}C$,

so ist	$C:B\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}A:B$	(V, 7. 8.),
und da	$A:B>C:D$	(Vorauss.);
so ist auch	$C:B>C:D$	(V. 13. u. §. 7.),
und daher	$B<D$	(V, 10.).

2) Wenn $B\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}D$, so ist $C:D\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}C:B$ (V, 7. 8.);

folglich, da	$A:B>C:D$	(Vorauss.),
so ist auch	$A:B>C:B$	(V, 13. u. §. 7.),
und daher	$A>C$	(V, 10.).

§. 43. Satz XXII. Wenn von vier gleichartigen Gröfsen A, B, C, D die erste A zu der zweiten B ein gröfseres Verhältnifs hat, als die dritte C zu der vierten D; so hat auch verwechselt (*alterne*) die erste A zu der dritten C ein gröfseres Verhältnifs, als die zweite B zu der vierten D.

Kurz ausgedrückt: wenn $A : B > C : D$,
so ist auch $A : C > B : D$,
oder umgekehrt $C : A < D : B$.

Beweis. Es sey

$$mA > nB, \text{ und } mC \begin{cases} = \\ < \end{cases} nD \text{ (Vorauss. u. V, def. 7.)};$$

so ist demnach $mA : mC > nB : nD$ (§. 41.),
und daher $A : C > B : D$ (§. 12.).

§. 44. Satz XXIII. Wenn von vier gleichartigen Gröfsen A, B, C, D die erste A zu der zweiten B ein gröfseres Verhältnifs hat, als die dritte C zu der vierten D; so hat die Summe der ersten A und der zweiten B zu der Summe der dritten C und der vierten D ein gröfseres Verhältnifs, als die zweite B zu der vierten D; ein kleineres hingegen, als die erste A zu der dritten C.

Kurz ausgedrückt: wenn $A : B > C : D$;
so ist $A+B : C+D \begin{cases} > B : D, \\ < A : C. \end{cases}$

Beweis. Da $A : B > C : D$ (Vorauss.), so ist
1) verbunden $A+B : B > C+D : D$ (§. 19.)
und verwechselt $A+B : C+D > B : D$ (§. 43.)
2) ist auch $A+B : A < C+D : C$ (§. 21.)
und wieder verwechselt $A+B : C+D < A : C$ (§. 43.).

§. 45. Zus. 1. Unter der nämlichen Voraussetzung, wie §. 44., hat auch die Summe der ersten A und der dritten C zu der Summe der zweiten B und der vierten D ein gröfseres Verhältnifs, als die dritte C zu der vierten D; ein kleineres hingegen, als die erste A zu der zweiten B.

Denn da $A : B > C : D$,
so ist verwechselt $A : C > B : D$ (§. 43.),
und daher $A+C : B+D \begin{cases} > C : D \\ < A : B \end{cases}$ (§. 44.).

§. 46. Zus. 2. Von zwei ungleichen Gröfsen steht die gröfsere zu der kleineren in gröfserem Verhältnifs, als die Summe der gröfseren und irgend einer dritten zu der Summe der zweiten und der nämlichen dritten.

Denn wenn $A > B$, so ist $A : C > B : C$ (V, 8.),
und daher $A+C : B+C < A : B$ (§. 44.),
oder $A : B > A+C : B+C$.

§. 47. Satz XXIV. Wenn von vier gleichartigen Gröfsen A, B, C, D die erste A zu der zweiten B ein gröfseres Verhältnifs hat, als die dritte C zu der vierten D; so hat der Unterschied der ersten A und der zweiten B zu dem Unterschiede der dritten C und der vier-

ten D ein gröfseres Verhältnifs, als die erste A zu der dritten C, oder die zweite B zu der vierten D, wenn die dritte C gröfser ist als die vierte D, und daher auch (§. 11.) die erste A gröfser als die zweite B; ein kleineres aber, wenn die zweite B gröfser ist, als die erste A, und daher (§. 11.) auch die vierte D gröfser ist als die dritte C.

Kurz ausgedrückt: wenn $A : B > C : D$,

und $C > D$, folgl. (§. 11.) auch $A > B$; so ist $A-B : C-D > \begin{cases} A : C, \\ B : D; \end{cases}$

wenn aber $B > A$ . . . . . $D > C$; so ist $B-A : D-C < \begin{cases} A : C, \\ B : D. \end{cases}$

Beweis. Da $A : B > C : D$ (Vorauss.); so ist

1) wenn $C > D$, $A-B : A > C-D : C$ (§. 24.),

und . . . . $A-B : B > C-D : D$ (§. 22.);

folglich auch verwechselt $A-B : C-D > A : C$

und $A-B : C-D > B : D$ (§. 43.).

2) Wenn $B > A$, so ist $B-A : A < D-C : C$,

und ebenso $B-A : B < D-C : D$ (§. 28.);

daher wieder verwechselt $B-A : D-C < A : C$,

und $B-A : D-C < B : D$ (§. 43.).

§. 48. Zus. 1. Unter der nämlichen Voraussetzung, wie §. 47. hat der Unterschied der ersten A und der dritten C zu dem Unterschiede der zweiten B und der vierten D ein gröfseres Verhältnifs, als die erste A zu der zweiten B, oder die dritte C zu der vierten D, wenn die zweite B gröfser ist, als die vierte D, und daher (§. 42.) auch die erste A gröfser als die dritte C; ein kleineres aber, wenn die erste A kleiner ist, als die dritte C, und daher (§. 42.) auch die zweite B kleiner als die vierte D.

Denn da $A : B > C : D$,

so ist verwechselt $A : C > B : D$ (§. 43.),

und daher, wenn $B > D$, $A-C : B-D > \begin{cases} A : B, \\ C : D. \end{cases}$

wenn aber $A < C$, $C-A : D-B < \begin{cases} A : B, \\ C : D \end{cases}$ (§. 47.).

§. 49. Zus. 2. Von zwei ungleichen Gröfsen hat die gröfsere zu der kleineren ein kleineres Verhältnifs, als der Ueberschufs der gröfseren über irgend eine dritte zu dem Ueberschufs der kleineren über ebendiese, wenn nämlich diese letztere kleiner als die beiden ersteren ist; ein gröfseres hingegen, als der Ueberschufs irgend einer dritten, welche gröfser als beide erstere sey, über die gröfsere, zu dem Ueberschufs ebenderselben dritten über die kleinere.

Denn wenn $A > B$, so ist $A : C > B : C$ (V, 8.)
und daher $A - C : B - C > A : B$, wenn $C < B$,
und $C - A : C - B < A : B$, wenn $C > A$ (§. 47.).
oder $A : B \begin{cases} < A - C : B - C, \\ > C - A : C - B. \end{cases}$

§. 50. Satz XXV. Wenn von beliebig vielen gleichartigen Gröfsen A, C, E u. s. w. und ebenso vielen anderen B, D, F u. s. w. welche sowohl unter sich als mit ersteren gleichartig sind, die erste A von den ersteren zu der ersten B von den letzteren ein gröfseres Verhältnifs hat, als die zweite C von den ersteren zu der zweiten D von den letzteren; und diese zu einander wieder ein gröfseres, als die dritte E von ersteren zu der dritten F von letzteren, und so weiter: so hat die Summe $A+C+E+$ u. s. w. aller ersteren zu der Summe $B+D+F+$ u. s. w. aller letzteren ein gröfseres Verhältnifs, als die letzte E von den ersteren zu der letzten F von den letzteren; ein kleineres, als die erste A von den ersteren zu der ersten B von den letzteren; und endlich ein gröfseres, als die Summe aller ersteren $C+E+$ u. s. w. mit Ausnahme der ersten A von diesen, zu der Summe aller letzteren $D+F+$ u. s. w. mit Ausnahme der ersten B von diesen.

Kurz ausgedrückt:
wenn $A : B > C : D$, und $C : D > E : F$,
so ist $A+C+E : B+D+F \begin{cases} > E : F, \\ < A : B, \\ > C+E : D+F. \end{cases}$

Beweis. Da $A : B > C : D$ (Vorauss.),
so ist $A+C : B+D > C : D$ und $< A : B$ (§. 45.);
da aber $C : D > E : F$ (Vorauss.),
so ist auch $A+C : B+D > E : F$ (§. 7.),
und daher $A+C+E : B+D+F > E : F$, hingegen $< A+C : B+D$ (§. 45.).

Da nun $A+C : B+D < A : B$ (verm. d. Bew.)
so ist noch ferner $A+C+E : B+D+F < A : B$ (§. 7.),
und daher $A+C+E : B+D+F > C+E : D+F$ (§. 48.).

§. 51. Satz XXVI. Wenn von vier gleichartigen Gröfsen A, B, C, D die erste A zu der zweiten B ein gröfseres Verhältnifs hat, als die dritte C zu der vierten D; und sowohl die zweite B als auch die dritte C gröfser ist, als die vierte D, und daher (§. 11. 42.) auch die erste A gröfser als die zweite B oder die dritte C: so ist die Summe der gröfsten A und der kleinsten D gröfser, als die Summe der beiden übrigen B und C.

Kurz ausgedrückt:
wenn $A : B > C : D$, und $B > D$ und ebenso $C > D$,
so ist $A + D > B + C$.

Beweis. Da $A : B > C : D$ und $C > D$ (Vorauss.),
so ist getrennt $A - B : B > C - D : D$ (§. 22.),
und da $B > D$ (Vorauss.), auch $A - B > C - D$ (§. 42.),
und, wenn man beiderseits $B + D$ addirt,
$A + D > B + C$.

§. 52. Satz XXVII. Wenn von vier Zahlen oder Linien A, B, C, D die erste A zu der zweiten B ein gröfses Verhältniſs hat, als die dritte C zu der vierten D; so ist das Product oder das Rechteck der äufseren gröfser, als das Product oder das Rechteck der mittleren; und umgekehrt.

Das ist, wenn $A : B > C : D$,
so ist $A \times D > B \times C$, und umgekehrt,
indem A, B, C, D Zahlen oder Linien bezeichnen.

Beweis. 1) Da $A : B > C : D$ (Vorauss.)
und $A : B = A \times C : B \times C$ (VII, 17. 18. VI, 1.),
so ist auch $A \times C : B \times C > C : D$ (V, 13.);
und da wieder $C : D = A \times C : A \times D$ (VII, 17. 18. VI, 1.),
so ist auch $A \times C : B \times C > A \times C : A \times D$ (V, 13.).
und daher $B \times C < A \times D$ (V, 10.)
oder $A \times D > B \times C$.

2) Wenn $A \times D > B \times C$, so ist auch
$A \times C : B \times C > A \times C : A \times D$ (V, 8.),
und da $A \times C : B \times C = A : B$ (VII, 17. 18. VI, 1.),
so ist $A : B > A \times C : A \times D$ (V, 13.);
und da wieder $A \times C : A \times D = C : D$ (VII, 17. 18. VI, 1.),
so ist auch $A : B > C : D$ (V, 13.).

§. 53. Zusatz. Wenn demnach $A : B > B : C$, indem wieder A, B, C Zahlen oder Linien bezeichnen, so ist $A \times C > B^2$ oder B^q, und umgekehrt.

III.

Deduction der Euclidischen Definitonen 3. 4. 5. 7. des V. Buches der Elemente.

§. 1. Es mögen m, n, p, q, r in der Folge ganze Zahlen bezeichnen; manchmal mit Einschluſs der Einheit, wo es aber ausdrücklich bemerkt werden wird.

§. 2. Die Frage: Welches (geometrische) Verhältniſs zwei ungleiche homogene Gröſsen A, B gegen einander haben? wird, wenn es möglich ist, d. h. wenn A und B commensurabel sind, durch die Angabe beantwortet: A enthalte B, $m$mal, $\frac{1}{n}$mal, $\frac{m}{n}$ mal; A sey $=mB$, oder $=\frac{1}{n}B$, oder $=\frac{m}{n}B$: und m, $\frac{1}{n}$, $\frac{m}{n}$ heiſsen der Exponent des Verhältnisses $A:B$.

Sind aber A und B incommensurabel; so gibt man für irgend eine angenommene Zahl n an: A enthalte B mehr als $\frac{r}{n}$, und weniger als $\frac{r+1}{n}$mal (wo r auch $=1$ seyn kann); A sey $>\frac{r}{n}B$ u. $<\frac{r+1}{n}B$: und $\frac{r}{n}$, $\frac{r+1}{n}$ heiſsen Grenzen des Exponenten des Verhältnisses $A:B$; $\frac{r}{n}$ die kleinere, $\frac{r+1}{n}$ die gröſsere. Je gröſser die Zahl n ist, desto näher fallen beide Grenzen zusammen.

§. 3. In dem ersten Falle ist $A=mB$, oder $nA=B$, oder $nA=mB$; und in dem zweiten ist $nA>rB$, aber $<(r+1)B$. Das heiſst: ein gewiſses Vielfaches der einen Gröſse ist entweder der andern, oder einem Vielfachen der andern gleich; oder ein gewiſses Vielfaches der ersten ist gröſser als ein gewiſses Vielfaches der

zweiten, aber kleiner als das nächstfolgende Vielfache derselben.

§. 4. Umgekehrt folgen aus den Angaben §. 3. die §. 2., d. h. weiſs man, wenn *A* und *B* commensurabel sind, welchem Vielfachen von *B* die andere Gröſse *A* gleich sey; oder, welches Vielfache von *A* der Gröſse *B* gleich sey; oder, welche Vielfache beider Gröſsen einander gleich seyen: so weiſs man den Exponenten ihres Verhältnisses.

Sind hingegen *A* und *B* incommensurabel; und weiſs man, zwischen welche zunächst auf einander folgende Vielfache von *B* irgend ein Vielfaches von *A* falle: so kennt man die Grenzen des Exponenten des Verhältnisses *A*: *B* für die Zahl, welche das Vielfache von *A* angibt.

§. 5. So reducirt sich im Allgemeinen (ohne Unterschied der zwei bisher erwähnten Fälle) die Untersuchung des Verhältnisses *A*: *B* auf die Vergleichung (in Rücksicht auf Gleichheit und Ungleichheit) entweder der einen Gröſse mit den Vielfachen der andern, oder der Vielfachen beider unter einander; auf die Untersuchung: *qualiter magnitudines A, B se habeant quoad multiplicitatem?* Auf eben diese Erklärung weiset die Folge der 1. 2. 3. Def. so wie die Fassung der 4, 5, 7. hin.

Aber die Worte des Textes: λογος εστι δυο μεγεθων ομογενων η κατα πηλικοτητα προς αλληλα ποια σχεσις, geben diesen Sinn nicht. Sie lassen auch in Zweifel, ob die Erklärung sich auf Verhältniſs überhaupt oder auf geometrisches insbesondere beziehe. Vgl. Simsons Anm. zu Def. 3. *). Πηλικοτης heiſst *quantitas*; wie in Ptolemaei *Magnae Construct.* Lib. I. p. 8. (Basil. 1538.) περι της πηλικοτητος των εν τω κυκλω ευθειων: folglich κατα πηλικοτητα, *quoad quantitatem.*

Clavius (*Eucl. Elem.* Francof. 1607. p. 352. sq.) erläutert dieſs so: *Quando duae quantitates ejusdem generis — inter se comparantur secundum quantitatem, h. e. secundum quod una major est quam altera, vel minor, vel aequalis, appellatur hujusmodi comparatio seu habitudo, Ratio.* Wallis (*Opp. math.* Oxon. 1651. Pars I. *Math. univ.* Cap. 25. 29. *Adversus Meibomii de proportionibus dialogum Tractatus* p. 6. sqq. 19. sqq. *Opp. math.* Oxon. 1693. Vol. II. *De Algebra Tractatus* Cap. 19. *De Postulato* 5. Lib. I. 9. Defin. 5. Lib. VI. *Euclidis Disceptatio*) will einen besonderen Nachdruck auf ποια σχεσις gelegt wissen,

*) Matthias p. 38. fg.

und übersetzt: *Ratio est duarum magnitudinum homogenearum ea relatio, qua dicitur, qualiter se habet earum una ad alteram secundum quantuplicitatem considerata; h. e. quot vicibus, aut etiam qua vel quanta parte unius vicis, una alteram contineat.* Barrow (*Lectiones habitae in scholis publ. Acad. Cantabrig. anno* 1666. Lond. 1684. *Lect.* III.) misbilliget beide; übersetzt (p. 220.) *κατα πηλικοτητα quoad quantitatem, h. e. quoad magnitudinis suae determinationem, vel magnitudinem ipsam determinatam; saltem secundum quod quaeritur: quantae sunt? et respondetur: tantae*; bekennt aber am Ende: diese Definition sey nicht mathematisch genug; und, so wie die 8te, für die Folge ganz entbehrlich. Rob. Simson (p. 354. sq.) sagt, nach Anführung dieses Urtheils Barrow's: *Quibus nihil addendum video, praeterquam quod hisce rationibus de inutilitate hujus et sequentis 8vae definitionis persuasus firmiter credam, eas non Euclidis esse, sed cujusdam minus periti editoris.* Einen andern Anlafs zu diesem Verdachte gibt die Beziehung, welche diese dritte Definition des V. B. auf die zuverläfsig unächte, von Theon, oder wenigstens aus dessen Commentar über des Ptolomäus *Magn. Constr.* (Lib. I. p. 62.) eingeschobene fünfte Defin. des VI. Buchs zu haben scheint (S. Rob. Simson p. 370. 372. sqq.*)).

§. 6. Wie man aber auch die 3. Definition ansehen mag; so liegt die Reduction §. 3. 4. wenigstens in den folgenden Definitionen, und in den auf dieselbe sich beziehenden Beweisen des V. Buches, so wie der übrigen, zum Grunde. Und hieraus erwächst der Vortheil, zu der Behandlung der Verhältnisse nicht, wie die erstere Vorstellungsart §. 2., Division einer Gröfse durch die andere, welche eigentlich nur bei Zahlen statt hat, wenigstens Theilung der Gröfsen in gleiche Theile, sondern blofs Multiplication der Gröfsen, oder wiederholte Addition derselben zu sich selbst, vorauszusezen und zu fordern. Letztere allein, und umgekehrt, wiederholtes Abziehen einer gegebenen kleinern Gröfse von einer gegebenen gröfseren, nimmt Euclid stillschweigend als Postulate an: Theilung gerader Linien, Winkel, Cirkelbögen in gleiche Theile lehrt er, ehe er sie zu den Constructionen seiner Beweise gebraucht. Daher bemerkt Rob. Simson (Euclidis *Elem. Oxon.* 1756. p. 357. sq.) bei dem 5ten Satz des V. Buches**):

*) Matthias p. 46 fgg.

**) Matthias p. 82 fgg.

In constructione demonstrationi hujus praemissa, quae habetur in textu Graeco ejusque versionibus Latinis, requiritur, ut — EB secetur in tot partes aequales, quot sunt in AE aequales ipsi CF. Ex hoc autem manifestum est, constructionem hanc non esse Euclidis. Non enim docet Euclides, quomodo secari possint rectae lineae, nedum aliae magnitudines, in partes aequales, antequam ad VI, 9. veniat. Nunquam autem in constructione jubet aliquid fieri, quod facere non prius docuerat [vel postulaverat]. Constructionem igitur mutavimus in eam, quam sine dubio Euclides dederat; in qua nihil requiritur, praeterquam quod magnitudo sibi ipsi aliquoties addatur.

§. 7. Sind A und B commensurabel; also entweder die eine einem Vielfachen der andern, oder ein Vielfaches der einen einem Vielfachen der andern gleich; $A=mB$, oder $nA=B$, oder $nA=mB$: so ist in dem ersten Falle $A+A$ d. h. $2A>mB$, und $mB+B$ oder $(m+1)B>A$; in dem zweiten $nA+A$ d. i. $(n+1)A>B$, und $B+B$ oder $2B>nA$; in dem dritten $nA+A$ d. i. $(n+1)A>mB$, und $mB+B$ oder $(m+1)B>nA$. Da nun, wenn A und B incommensurabel sind, sich immer nur angeben läfst: $nA>rB<(r+1)B$ oder $(r+1)B>nA$; so faſst Euclid in der 4. Defin. wieder beide Fälle zusammen, und setzt als allgemeines Merkmal homogener Gröfsen, oder solcher, die ein Verhältniſs zu einander haben, fest: daſs sie vervielfältiget einander übertreffen können: *Λογον εχειν προς αλληλα μεγεθη λεγεται, α δυνατα πολλαπλασιαζομενα αλληλων υπερεχειν.*

§. 8. In der Folge nimmt er besonders, entweder als in dieser Definition enthalten, oder stillschweigend als Postulat an: von zweien dergleichen homogenen Gröfsen lasse sich die kleinere so vervielfältigen, daſs sie gröfser werde, als die gröfsere. Eben dieses postulirt Archimedes (*de sphaera et cylindro*, Lib. I. und *quadratura parabolae*. Praef.) von dem Ueberschusse einer gegebenen gröfsern Linie, Fläche, Körper, über eine gegebene kleinere.

§. 9. Zwei Verhältnisse $A:B$, $C:D$, heifsen nach der Vorstellungsart §. 2. gleich, wenn ihre Exponenten gleich sind, oder immer zwischen einerlei Grenzen fallen.

D. h. soll $A:B$ sich verhalten wie $C:D$; so muſs, wenn A die Gröfse B, m, $\frac{1}{n}$, $\frac{m}{n}$mal enthält, auch C

die Gröfse D, m, $\frac{1}{n}$, $\frac{m}{n}$ mal enthalten; und umgekehrt, wenn sowohl A die Gröfse B, als C die Gröfse D, m, $\frac{1}{n}$, $\frac{m}{n}$ mal enthält; so sagt man, es sey $A:B=C:D$. Die Glieder beider Verhältnisse müfsen also zugleich commensurabel seyn.

Enthält A weder B, noch irgend einen aliquoten Theil von B, ein oder etlichemal genau; so kann auch C weder D, noch irgend einen aliquoten Theil von D, ein oder etlichemal genau enthalten, wenn die Verhältnisse $A:B$, $C:D$ unter einander einerlei seyn sollen. Die Glieder beider gleichen Verhältnisse müfsen also auch zugleich incommensurabel seyn. Und nun würde $C:D$ sich nicht wie $A:B$ verhalten, wenn, für irgend eine Zahl n, für welche $A > \frac{r}{n}B < \frac{r+1}{n}B$ ist, nicht auch $C > \frac{r}{n}D < \frac{r+1}{n}D$, sondern entweder C schon $< \frac{r}{n}D$, oder noch $> \frac{r+1}{n}D$ wäre.

§. 10. Der Vorstellungsart §. 3. fg. zufolge, wird diesemnach zur Einerleiheit zweier Verhältnisse $A:B$, $C:D$ erfordert: dafs, wenn $A=mB$, oder $nA=B$, oder $nA=mB$ ist, auch $C=mD$, $nC=D$, $nC=mD$ sey; und in dem Falle der Incommensurabilität, dafs für jede Zahl n, zugleich $nA > rB < (r+1)B$, $nC > rD < (r+1)D$ seyen. Diese Bedingungen müfsen statt haben, wenn man zu der Folgerung berechtiget seyn solle: A verhalte sich zu B, wie C zu D. Und umgekehrt, wenn man angibt: A und B, C und D haben zu einander einerlei Verhältnifs; so mufs verstanden werden, dafs jene Bestimmungen bei ihnen statt haben.

§. 11. Euclids 5te Definition: *Εν τω αυτω λογω μεγεθη λεγεται ειναι, πρωτον προς δευτερον, και τριτον προς τεταρτον· οταν τα τε πρωτε και τριτε ισακις πολλαπλασια των τε δευτερε και τεταρτε ισακις πολλαπλασιων, καθ' ομοιονεν πολλαπλασιασμον, εκατερε η αμα ελλειπη, η αμα ισα η, η αμα υπερεχη, λεφθεντα καταλληλα*; welche also zur Einerleiheit zweier Verhältnisse $A:B$, $C:D$ die Bedingung erfordert, oder aus derselben die Consequenz folgert: dafs für jede Zahlen n, m immer zugleich $nA \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} mB$, $nC \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} mD$ seyen; enthält

nun theils mehr, theils weniger, als §. 10. angegeben ist. Für Verhältnisse commensurabler Gröfsen fehlen nämlich die Fälle $A=mB$; $nA=B$: für Verhältnisse incommensurabler Gröfsen wird hingegen mit jeder Zahl n, statt der bestimmten darauf sich beziehenden r, $r+1$, nach welchen $nA>rB<(r+1)B$ ist, jede andere m verbunden, und auf $nA\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}mB$ Rücksicht genommen; ferner, eben dieses auf gleiche Verhältnisse ohne Unterschied ausgedehnt.

§. 12. Was den zweiten Fall für incommensurable Gröfsen betrifft: so ist ohne Zweifel die bestimmte Bedingung §. 10. unter der Euclidischen weiteren, als ein besonderer Fall begriffen, in so fern der Beweis der Einerleihelt zweier Verhältnisse darnach geführt wird. Und die Anwendung wird, wie die Beispiele davon zeigen, durch diese Erweiterung nicht nur nicht erschwert; sondern in der Rücksicht erleichtert, dafs man nicht nöthig hat, für jedes Vielfache von A, (nA), die nächstvielfachen von B, $(rB, (r+1)B)$, zwischen welche es fällt, zu bestimmen; oder für jede Zahl n die Grenzen $\frac{r}{n}$, $\frac{r+1}{n}$ des Exponenten des Verhältnisses $A:B$ anzugeben. Diese Grenzen mögen seyn, welche sie wollen: so wird, wenn man gezeigt hat, dafs immer zugleich $nA\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}mB$, und $nC\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}mD$ seyen; auch bestimmt $nC>rD<(r+1)D$ seyn, wenn $nA>rB<(r+1)B$ ist.

§. 13. Die Rechtfertigung der Fassung der Euclidischen Definition 5. in Beziehung auf die Converse des Falles §. 12. so wie in Betreff der bei andern §. 11. erwähnten Punkte, beruhet auf einigen Sätzen über die gleich Vielfachen zweier Gröfsen; welche theils Euclid selbst der Anwendung seiner 5. Defin. voranschickt; theils Folgerungen aus denselben und aus den Grundsätzen des ersten Buches sind.

§. 14. Satz I. Einerlei oder gleicher Gröfsen gleich Vielfache sind gleich.

Beweis. Ist nämlich $A=B$: so ist auch $A+A=B+B$ (I. B. Ax. 2.); d. h. $2A=2B$.

Und nun ferner $2A+A=2B+B$ (I. B. Ax. 2.); d. h. $3A=3B$; u. s. w.

Ueberhaupt $nA+A=nB+B$ (I. B. Ax. 2.), d. i $(n+1)A=(n+1)B$, wenn $nA=nB$.

§. 15. Satz II. (V, 1.) Sind $a, b, c, \ldots$ gleichartige Gröfsen; und $A, B, C, \ldots$ gleich Vielfache derselben: so ist die Summe $A+B+C+\ldots$ der letzteren, das eben so Vielfache der Summe $a+b+c+\ldots$ der ersteren, das wievielfache jedes der letzteren von jedem der ersteren ist, A nämlich von a, B von b, C von c, u. s. w. Kurz, wenn $A=na$, $B=nb$, $C=nc\ldots$ ist; so ist auch $A+B+C+\ldots$ oder $na+nb+nc+\ldots=n(a+b+c+\ldots)$.

Beweis. Nämlich unter der angegebenen Bedingung sind

$$\begin{array}{l} A=a+a+a+a+a+\ldots+a \\ B=b+b+b+b+b+\ldots+b \\ C=c+c+c+c+c+\ldots+c \\ \text{etc.} \end{array}$$

(1 2 3 4 5 n)

Folglich (I. B. Ax. 2.) $A+B+C+$ etc.

$$\left.\begin{array}{l} a+a+a+a+a+\ldots+a \\ +b+b+b+b+b+\ldots+b \\ +c+c+c+c+c+\ldots+c \\ \text{etc. etc. etc. etc. etc.} \end{array}\right\} =$$

$$=a+a+a+a+a+\ldots+a$$

d. h. $=n\alpha$, wenn $\alpha=a+b+c+\ldots$

§. 16. Zusatz 1. Eben so ist (a statt $b, c, \ldots$ gesetzt)

$$na+na+na+na+na+\ldots+na \quad (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \ r)$$

$$= n\,(a+a+a+a+a+\ldots+a) \quad (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \ r)$$

d. h. $r.na=n.ra$, das $r$fache des $n$fachen einer Gröfse ist dem $n$fachen des $r$fachen derselben Gröfse gleich.

§. 17. Zusatz 2. Gleich Vielfache ungleicher Gröfsen sind ungleich, nämlich, das der gröfseren ist gröfser.

Denn, wenn $A>B=B+C$ ist:

so ist $nA = n(B+C)$ (§. 14.)

Aber $nB+nC = n(B+C)$ (§. 15.)

Also ist $nA = nB+nC$ (I. B. Ax. 1.)

$> nB$ (I. B. Ax. 9.).

§. 18. Zusatz 3. Gröfsen, deren Gleichvielfache gleich sind, sind gleich.

Ist nämlich $nA=nB$: so kann von den Gröfsen A, B nicht die eine A gröfser als die andere B seyn; indem sonst $nA>nB$ wäre (§. 17.).

§. 19. Zusatz 4. Gröfsen, deren gleich Vielfache ungleich sind, sind ungleich; nämlich, diejenige ist gröfser, deren Gleichvielfaches gröfser ist.

Denn, wenn $nA > nB$ ist: so kann weder $A = B$ seyn, weil sonst $nA = nB$ wäre (§. 14.);

Noch kann $A < B$, $B > A$ seyn, weil sonst $nB > nA$ wäre (§. 17.).

§. 20. Satz III. Wenn A, E, G, ... Vielfache sind einer nämlichen Gröfse B; so ist ihre Summe das so Vielfache von B, als die Zahl angibt, welche die Summe der Zahlen ist, die die Vielfachheit von jeder derselben bezeichnen: d. h. wenn $A = pB$, $E = qB$, $G = rB$, ... und $n = p + q + r + \ldots$ ist: so ist $A + E + G + \ldots = nB$.

Beweis. Denn so bestehet $A + E + G + \ldots$ aus p, und q, und r, ... Theilen oder Gröfsen, jeder $= B$; d. i. aus B, gesetzt oder zu sich selbst addirt, $p + q + r + \ldots$ = $n$mal.

§. 21. Anmerk. 1. Der einfachste Fall ist, wenn zu irgend einem Vielfachen A einer Gröfse B, diese Gröfse selbst noch addirt wird. Alsdann enthält $A + B$ die Gröfse B, $(r+1)$mal, wenn A dieselbe $r$mal enthält; oder es ist $A + B = (r+1)B$, wenn $A = rB$.

§. 22. Zusatz 1. (V, 2.) Wenn A und C gleich Vielfache sind von B und D;

E und F wieder gleich Vielfache von B und D;

G und H ebenfalls gleich Vielfache von B und D; u. s. w.

so sind auch $A + E + G + \ldots$, $C + F + H + \ldots$, gleich Vielfache von B und D.

Denn, wenn (Vorauss.) sowohl $A = pB$ als $C = pD$

$E = qB$ $F = qD$

$G = rB$ $H = rD$

etc.

so ist auch

sowohl $A + E + G + \ldots = nB$, als $C + F + H + \ldots = nD$, wenn $n = p + q + r + \ldots$ (§. 20.).

§. 23. Anmerk. 2. Wenn n und m gleiche Zahlen sind; so sind nA und mA, als gleich Vielfache derselben Gröfse A, gleich (§. 14.).

§. 24. Zusatz 2. Ist aber $n > m = m + p$: so ist $mA + pA = nA$ (§. 20.); folglich $nA > mA$ (I. B. Ax. 9.).

§. 25. Zusatz 3. Umgekehrt ist $n = m$, wenn $nA = mA$.

Denn nun kann nicht eine der beiden Zahlen n > als die andere m seyn; sonst wäre $nA > mA$ (§. 24.).

§. 26. Zusatz 4. Hingegen ist $n>m$, wenn $nA>mA$.

Denn so kann weder $n=m$ seyn; weil sonst $nA=mA$ wäre (§. 23.).

Noch kann $n<m$, $m>n$ seyn; weil sonst $mA>nA$ wäre (§. 24.).

§. 27. Zusatz 5. Sind also A und C gleich Vielfache von B und D; und wiederum E und F gleich Vielfache derselben B und D; so wird $C\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}F$ seyn, so wie $A\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}E$ ist.

Denn, wenn A und C die $n$fachen, E und F die $m$fachen von B und D sind; so mufs

1) wenn $A=E$, d. h. $nB=mB$ ist; $n=m$ (§. 25.), folglich $nD=mD$ (§. 23.), d. i. $C=F$ seyn;

2) wenn $A>E$, d. h. $nB>mB$ ist; $n>m$ (§. 26.), folglich $nD>mD$ (§. 24.), d. i. $C>F$ seyn;

3) wenn $A<E$, also $E>A$, d. i. $mB>nB$ ist: mufs $m>n$ (§. 26.), daher $mD>nD$ (§. 24.), d. i. $F>C$, $C<F$ seyn.

§. 28. Satz IV. Das $r$fache des $n$fachen einer Gröfse ist dem $n$fachen des $r$fachen der nämlichen Gröfse gleich; d. h. $r\times nA=n\times rA$.

Beweis. $r.nA=\overset{1}{nA}+\overset{2}{nA}+\overset{3}{nA}+\overset{4}{nA}+\overset{5}{nA}+\ldots+\overset{r}{nA}$

und ebenso $rA=A+A+A+A+A+\ldots+A$

folglich $n.rA=n(A+A+A+A+A+\ldots+A)$ (§. 14.)

$=nA+nA+nA+nA+nA+\ldots+nA$ (§. 16.).

Also $r\times nA=n\times rA$ (I. B. Ax. 1.).

§. 29. Zusatz. (VII, 16.) Mithin ist $r\times n=n\times r$ (§. 25.): d. h. das $r$fache der Zahl n ist dem $n$fachen der Zahl r gleich; oder das Product zweier ganzen Zahlen wird durch die Verwechslung des Multiplicandus und Multiplicators nicht geändert.

Dieses läfst sich auch schon, so wie in dem Beweise §. 28. folgern, und als ein besonderer Fall des Satzes §. 28. betrachten; da die ganzen Zahlen n, r das $n$fache, $r$fache der Einheit sind.

§. 30. Satz V. (V, 3.) Wenn A und C gleich Vielfache sind von B und D; und man nimmt E und F

gleich Vielfache von A und C: so sind auch E und F gleich Vielfache von B und D.

Beweis. Den Bedingungen zufolge sind

sowohl $E=\left\{\begin{array}{l} A=pB \\ +\ A=pB \\ +\ A=pB \\ \cdot \\ \cdot \\ +\ A=pB \end{array}\right.$ als $F=\left\{\begin{array}{l} C=pD \\ +\ C=pD \\ +\ C=pD \\ \cdot \\ \cdot \\ +\ C=pD \end{array}\right.$

folglich (§. 22.) E und F gleich Vielfache von B und D, nämlich, sowohl $E=n\times pB$, als $F=n\times pD$, weil beides, $E=nA$ und $F=nC$.

§. 31. Satz VI. Wenn $A=mB$, und $C=mD$ ist;
oder wenn $nA=B$, und $nC=D$;
oder wenn $nA=mB$, und $nC=mD$ ist:
so sind jede gleich Vielfache von A und C irgend gleich Vielfachen von B und D, das von A nämlich dem von B, und das von C dem von D, entweder beide gleich, oder zugleich größer, oder kleiner; d. h. pC ist $=qD$, $>qD$, $<qD$, so wie $pA=qB$, $>qB$, $<qB$ ist, für jede zwei ganze Zahlen p, q.

Beweis. 1stens. Wenn $A=mB$, und $C=mD$; also auch $pA=p\times mB$, $pC=p\times mD$ (§. 14.);

so ist, so wie $pA\left\{\begin{array}{l}<\\=\\>\end{array}\right\}qB$, eben daher $p\times mB$, (als $=pA$), $\left\{\begin{array}{l}<\\=\\>\end{array}\right\}qB$;

und nun ebenfalls $p\times mD\left\{\begin{array}{l}<\\=\\>\end{array}\right\}qD$ (§. 30. 27.); folglich, da $p\times mD=pC$, auch $pC\left\{\begin{array}{l}<\\=\\>\end{array}\right\}qD$.

2tens. Ebenso, wenn $nA=B$, und $nC=D$; also auch $q\times nA=qB$, $q\times nC=qD$ (§. 14.):

ist, so wie $pA\left\{\begin{array}{l}<\\=\\>\end{array}\right\}qB$, ebenfalls $pA\left\{\begin{array}{l}<\\=\\>\end{array}\right\}q\times nA$; daher auch $pC\left\{\begin{array}{l}<\\=\\>\end{array}\right\}q\times nC$ (§. 30. 27.) oder qD.

3tens. Wenn $nA=mB$, und $nC=mD$:

so ist, so wie $pA\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}qB$, auch $n\times pA\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}n\times qB$(§.14.17.)

Da aber $nA=mB$ (Vorauss.); so ist $p\times nA=p\times mB$ (§. 14.)

und $p\times nA=n\times pA$ (§. 28.).

So wie $pA\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}pB$: ist also auch $p\times mB\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}n\times qB$;

und daher ebenfalls $p\times mD\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}n\times qD$ (§. 30. 27.)

Da aber $nC=mD$ (Vorauss.) so ist:

$p\times nC=p\times mD$ (§. 14.)

Folglich ist zugleich auch $p\times nC\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}n\times qD$.

Nun ist $p\times nC=n\times pC$ (§. 28.)

Mithin gleichfalls auh $n\times pC\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}n\times qD$; und daher ebenfalls zugleich $pC\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}qD$ (§. 18. 19.).

§. 32. Aus der Einerleiheit zweier Verhältnisse commensurabler Gröfsen, $A:B$, $C:D$, der gemeinschaftliche Exponent derselben mag m, $\frac{1}{n}$, oder $\frac{m}{n}$ seyn, wird also immer richtig gefolgert: dafs zugleich $pA\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}qB$, und $pC\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}qD$ seyen, für jede ganze Zahlen p, q (§. 31.).

§. 33. Sind aber A und B, C und D incommensurabel; und $\frac{r}{n}$, $\frac{r+1}{n}$ die gemeinschaftlichen Grenzen der Exponenten der gleichen Verhältnisse $A:B$, $C:D$, für die Zahl n; ist also bestimmt $nA>rB<(r+1)B$, und zugleich $nC>rD<(r+1)D$: so mufs,

1) wenn überhaupt $nA>mB$ ist; $mB=$ oder $<rB$; folglich $m=$ oder $<r$ (§. 25. 26.), $mD=$ oder $<rD$ (§. 23. 24.); daher nC, welches $>rD$ (Vorauss.), auch $>mD$ seyn.

2) Eben so, wenn $nA < mB$: mufs $mB =$ oder $> (r+1)B$; daher $m =$ oder $> r+1$ (§. 25. 26.); $mD =$ oder $> (r+1)D$ (§. 23. 24.); folglich nC, welches $< (r+1)D$ (Voraus.), auch $< mD$ seyn.

§. 34. Die allgemeine Angabe der Euclidischen 5. Definition, dafs, wenn $A : B = C : D$, immer zugleich $nA \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} mB$, $nC \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} mD$ seyen, ist also gegründet (§. 32. 33.).

§. 35. Dafs umgekehrt, wenn in dem nach eben dieser Definition geführten Beweise der Einerleiheit zweier Verhältnisse $A : B$, $C : D$ dargethan wird, es seyen immer zugleich $nA \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} mB$, $nC \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} mD$; eben daraus die durchgängige Einerleiheit der Grenzen der Exponenten beider Verhältnisse, wenn A und B, C und D incommensurabel sind, bewiesen werde, ist schon §. 12. bemerkt worden.

Sind aber A und B, C und D commensurabel: und ist

1) $\frac{m}{n}$ der Exponent des Verhältnisses $A : B$; also $nA = mB$; folglich vermöge des Beweises nach Defin. 5. zugleich $nC = mD$: so ist auch $C = \frac{m}{n} D$, oder $\frac{m}{n}$ der Exponent des Verhältnisses $C : D$.

2) Wenn $A = mB$; also $pA = p \times mB$ (§. 14.) ist: so ist vermöge des Beweises und §. 30. zugleich $pC = p \times mD$, und daher auch $C = mD$ (§. 18.).

3) Wenn $nA = B$; also $p \times nA = pB$ (§. 14.): so ist wieder vermöge des Beweises und §. 30. auch $p \times nC = pD$; folglich $nC = D$ (§. 18.).

§. 36. Der nach der Euclidischen 5. Definition geführte Beweis der Einerleiheit zweier Verhältnisse enthält also für den Fall, wenn die Gröfsen commensurabel sind, den Beweis der Gleichheit ihrer Exponenten, von welcher Form diese auch seyn mögen, m, oder $\frac{1}{n}$, oder $\frac{m}{n}$; und für incommensurable Gröfsen den vollständigen Beweis der durchgängigen Einerleiheit der Grenzen ihrer Exponenten.

Er schliefst zwar, besonders in dem erstern Fall,

viel mehreres in sich. Dieser weitere Umfang aber, der übrigens seine Anwendung nicht erschwert, verschafft ihm den Vortheil, alle verschiedenen Fälle und Formen auf einmal zu umfassen.

§. 37. Nach der Vorstellungsart §. 2. werden die Verhältnisse $A:B$, $C:D$ verschieden seyn, wenn ihre Exponenten ungleich sind, oder nicht immer zwischen einerlei Grenzen fallen.

Und das Verhältnifs $A:B$ wird gröfser heifsen als das $C:D$, wenn C die Gröfse D wenigermal enthält oder enthalten kann, als vielmal A die B enthält; oder wenn A die Gröfse B mehrmal enthält, wenigstens enthalten mufs, als C die D enthält oder enthalten kann: und umgekehrt.

§. 38. Hiebei können nämlich entweder die Glieder beider Verhältnisse commensurabel; oder die Glieder beider incommensurabel; oder die des einen commensurabel, und die des andern incommensurabel seyn.

§. 39. Sind sowohl A und B, als C und D commensurabel; die Exponenten ihrer Verhältnisse aber ungleich: so heifst dasjenige von beiden $A:B$ das gröfsere, dessen Exponent der gröfsere ist. Wenn also $A=mB$, oder $=\frac{1}{n}B$, oder $=\frac{m}{n}B$; aber $C<mD$, oder $<\frac{1}{n}D$, oder $<\frac{m}{n}D$ ist: folglich, wenn $A=mB$, aber $C<mD$; oder wenn $nA=B$, aber $nC<D$; oder wenn $nA=mB$, aber $nC<mD$ ist: so ist $A:B>C:D$.

Umgekehrt soll $A:B>C:D$ seyn: so mufs, wenn die Glieder beider Verhältnisse commensurabel sind, der Exponent des ersten gröfser seyn, als der Exponent des zweiten: folglich, wenn $A=mB$ ist, $C<mD$ seyn; wenn $nA=B$, mufs $nC<D$; wenn $nA=mB$ ist, $nC<mD$ seyn.

§. 40. Sind A und B commensurabel, aber C und D incommensurabel: so wird $A:B>C:D$ heifsen, wenn der Exponent m, $\frac{1}{n}$, $\frac{m}{n}$ des Verhältnisses $A:B$ so grofs oder gröfser ist, als eine der gröfseren Grenzen (§. 2.) des Exponenten des Verhältnisses $C:D$; und umgekehrt: also wenn $A=mB$, $C>rD<(r+1)D$, und $m=$ oder $>r+1$, folglich $C<mD$; oder wenn $nA=B$, aber $nC<D$; oder wenn $nA=mB$, $nC>rD<(r+1)D$, und wieder $m=$ oder $>r+1$, also $nC<mD$: und umgekehrt.

§. 41. Sind C und D commensurabel, A und B incommensurabel: so wird $A:B>C:D$ seyn, wenn eine der kleineren Grenzen des Exponenten des Verhältnisses $A:B$ dem Exponenten des Verhältnisses $C:D$ gleich ist, oder denselben noch übertrifft; und umgekehrt: d. h. wenn, indem $A>\frac{r}{n}B<\frac{r+1}{n}B$ ist, entweder $C=\frac{r}{n}D$ oder $<\frac{r}{n}D$ ist; folglich wenn, indem $nA>rB$ ist, nC ist $=rD$ oder $<rD$; und umgekehrt.

§. 42. Sind endlich sowohl A und B, als C und D incommensurabel: so wird $A:B>C:D$ heifsen, wenn für irgend eine Zahl n die kleinere Grenze des Exponenten des Verhältnisses $A:B$ der gröfseren Grenze des Exponenten des Verhältnisses $C:D$ gleich, oder gröfser als sie ist; und umgekehrt: d. h. wenn, indem $A>\frac{r}{n}B<\frac{r+1}{n}B$ ist, entweder C nur $<\frac{r-1}{n}D$ und schon $<\frac{r}{n}D$, oder sogar schon $C<\frac{r-1}{n}D$ ist; folglich wenn wiederum, indem $nA>rB$ ist, nC hingegen ist $<rD$: und umgekehrt.

§. 43. Euclids 7te Definition: *Οταν δε των ισακις πολλαπλασιων, το μεν τυ πρωτυ πολλαπλασιον υπερεχη τυ τυ δευτερυ πολλαπλασιυ, το δε τυ τριτυ πολλαπλασιον μη υπερεχη τυ τυ τεταρτυ πολλαπλασιυ· τοτε το πρωτον προς το δευτερον μειζονα λογον εχειν λεγεται, ηπερ το τριτον προς το τεταρτον*; schränkt sich blofs auf die Bedingungen und Folgerungen §. 41. 42. ein, ohne der Fälle §. 39, 40. zu erwähnen.

Dieses wird durch die folgenden zwei Sätze gerechtfertiget.

§. 44. Satz VII. Wenn $A=mB$, aber $C<mD$; oder wenn $nA=B$. aber $nC<D$; oder wenn $nA=mB$, aber $nC<mD$; so lassen sich immer ein gleich Vielfaches von A und C, und ein gleich Vielfaches von B und D angeben; so, dafs das Vielfache von A gröfser ist als das von B, das Vielfache von C aber nicht gröfser ist als das von D.

Beweis. 1stens. Es sey $A=mB$, aber $C<mD$, nämlich $mD=C+E$: so wird

α) wenn $C\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right.E$ ist; $2C\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right.C+E$, oder mD seyn (I. B. Ax. 2. 4.), da hingegen $2A=2mB$ (§. 14.) $>mB$ ist.

β) Wenn $C>E$ ist: so nehme man von E das Zweifache, Dreifache u. s. w., bis man ein Vielfaches von E erhält,

das gröfser als C ist (§. 8.). Dieses sey das $r$fache von E: also $C<rE$.

So ist $rC+C<rC+rE$ (I. B. Ax. 4.); d. h. $(r+1)C<r(C+E)$, oder $r\times mD$ (§. 21. 15.); da hingegen (§. 24.) $(r+1)A>rA$ oder (§. 14.) $r\times mB$ ist. Es sind aber $r\times mB$ und $r\times mD$ gleich Vielfache von B und D (§. 30.).

2tens. Es sey $nA=B$, aber $nC<D$, nämlich $D=nC+E$: so wird

α) wenn $C\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}E$, also (I. B. Ax. 2. 4.) $nC+C\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}nC+E$, d. i. $(n+1)C\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}D$ ist, $2(n+1)C\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}2D$ seyn (§. 14. 17.), indem $(n+1)A>nA$ oder B, folglich $2(n+1)A>2B$ ist (§. 17.).

β) Wenn $C>E$ ist; so sey wieder, wie nr. 1., $C<rE$.

So ist $r\times nC+C<r\times nC+rE$ (I. B. Ax. 4.): d. h. $(r\times n+1)C<r(nD+E)$ oder rD (§. 21. 15.): hingegen $r\times nA+A$ oder $(r\times n+1)A>r\times nA$ oder rB (§. 21. 14.). Nun sind $(r\times n+1)A$, $(r\times n+1)C$ gleich Vielfache von A und C (§. 30.).

3tens. Es sey $nA=mB$, aber $nC<mD$, nämlich $mD=nC+E$: so wird

α) wenn $C\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}E$, wieder (I. B. Ax. 2. 4.) $nC+C\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}nC+E$, d. h. $(n+1)C\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}mD$ seyn, indem $(n+1)A>nA$, also $>mB$ ist.

β) Wenn $C>E$, und, wie nr. 1., $C<rE$ ist:

so ist wieder $r\times nC+C<r\times nC+rE$ (I. B. Ax. 4.); d. h. $(r\times n+1)C<r\times(nC+E)$ oder $r\times mD$ (§. 21. 15.);

da hingegen $r\times nA+A$, d. i. $(r\times n+1)A>r\times nA$ oder $r\times mB$ ist (§. 21. 14.).

Nun sind $(r\times n+1)A$, $(r\times n+1)C$ gleich Vielfache von A und C; $r\times mB$, $r\times mD$ gleich Vielfache von B und D (§. 30. 22.).

§. 45. Satz VIII. Umgekehrt, wenn unter den gleich Vielfachen von A und C, und den gleich Vielfachen von B und D, ein Vielfaches von A gröfser ist, als das von B, das Vielfache von C aber nicht gröfser ist, als das von D; wenn nämlich $pA>qB$, aber pC nicht $>$ sondern $\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}qD$: und es ist $A=mB$;

so ist $C<mD$: oder es ist $nA=B$; so ist $nC<D$: oder es ist $nA=mB$; so ist $nC<mD$.

Beweis. 1stens. Es sey $A=mB$; also $pA=p\times B$ (§. 14.).

Da (Vorauss.) $pA > qB$: so ist auch $p \times mB > qB$; und daher ebenfalls $p \times mD > qD$ (§. 30. 27.).

Aber $pC \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} qD$ (Vorauss.). Mithin, da $qD < p \times mD$; *ex aequo*, oder *a fortiori*, $pC < p \times mD$; und daher $C < mD$ (§. 19.).

2tens. Es sey $nA = B$; also $q \times nA = qB$ (§. 14.).

Da $pA > qB$ (Vorauss.): so ist auch $pA > q \times nA$; folglich ebenfalls $pD > q \times nD$ (§. 27. 30.).

Aber $pC \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} qD$ (Vorauss.); daher auch $n \times pC \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} n \times qD$ (§. 14. 17.), oder $p \times nC \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} q \times nD$ (§. 28.);

folglich, da $q \times nD < pD$: *ex aequo* oder *a fortiori* $p \times nC < pD$; mithin $nC < D$ (§. 19.).

3tens. Es sey $nA = mB$: also $p \times nA = p \times mB$ (§. 14.); oder $n \times pA = m \times pB$ (§. 28.).

Da $pA > qB$ (Vorauss.); folglich $n \times pA > n \times qB$ (§. 17.); so ist $m \times pB > n \times qB$, und daher auch $m \times pD > n \times qD$ (§. 27. 30.).

Aber $pC \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} qD$ (Vorauss.); mithin $n \times pC \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} n \times qD$ (§. 14. 17.).

In beiden Fällen ist also wieder $n \times pC < m \times pD$ oder $p \times nC < p \times mD$ (§. 28.); und daher $nC < mD$ (§. 19.).

§. 46. So erhellet aus dem Bisherigen: dafs die Euclidischen Definitionen 5. 7. des V. Buchs, die Bedingungen und Eigenschaften der Gleichheit zweier Verhältnisse, und des Gröfserseyns des einen, welche sich aus dem gemeinen Begriffe des Enthaltenseyns einer Gröfse in der andern (§. 2.) nach den mancherlei Fällen, die dabei statt haben können, ergeben, in gröfster Allgemeinheit, auf die kleinstmögliche Anzahl reducirt, enthalten und angeben.

§. 47. Jene gewöhnliche Vorstellungsart (§. 2.) bei Seite gesetzt; dagegen den Euclidischen Begriff vom Verhältnifs (§. 3. fg.) zum Grunde gelegt, vermöge dessen die Einerleiheit oder Verschiedenheit zweier Verhältnisse $A:B$, $C:D$, von der Vergleichung der ersten A und der dritten C, oder ihrer gleich Vielfachen, mit gleich Vielfachen der zweiten B und der vierten D, oder mit ihnen selbst abhängen müfsen: läfst sich eben dieses auf folgende Art darstellen.

§. 48. Bei der Vergleichung von A und C mit gleich Vielfachen von B und D, so wie bei der von B

und D mit gleich Vielfachen von A und C, kommen folgende Fälle in Betrachtung:

1stens. A ist einem Vielfachen von B, und zugleich C dem eben so Vielfachen von D gleich; oder ein Vielfaches von A ist gleich B, und das nämliche Vielfache von C ist gleich D: es ist $A=mB$, und zugleich $C=mD$; oder es ist $nA=B$, und zugleich $nC=D$.

In beiden Fällen sind alsdenn jede gleich Vielfache von A und C, irgend gleich Vielfachen von B und D, das von A nämlich dem von B, und das von C dem von D, entweder beide gleich, oder beide zugleich gröfser oder kleiner: es sind immer zugleich $pA\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}qB$, und $pC\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}qD$; was auch p, q für ganze Zahlen seyn mögen (§. 31. nr. 1. 2.).

2tens. A ist zwar einem Vielfachen von B gleich, oder ein Vielfaches von A ist gleich B; aber C ist dem gleich Vielfachen von D nicht gleich, oder das gleich Vielfache von C ist nicht gleich D: es ist $A=mB$, aber $C\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}mD$; oder es ist $nA=B$, aber $nC\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}D$.

In den Fällen $A=mB$, aber $C<mD$; $nA=B$, aber $nC<D$; läfst sich immer ein gleich Vielfaches von A und C, und ein gleich Vielfaches von B und D angeben; so dafs das Vielfache von A gröfser ist, als das von B, das Vielfache von C aber nicht gröfser ist, als das von D (§. 44. nr. 1. 2.).

Und in den Fällen $A=mB$, aber $C>mD$; $nA=B$, aber $nC>D$:

sind (§. 14. 17.) $2A=2mB$, aber $2C>2mD$; $2nA=2B$, aber $2nC>2D$:

Man hat also gleich Vielfache von A und C, und (§. 30.) gleich Vielfache von B und D; so dafs das Vielfache von C gröfser ist, als das von D, das Vielfache von A aber nicht gröfser ist, als das von B.

3tens. C ist einem Vielfachen von D gleich, oder ein Vielfaches von C ist gleich D; aber A ist nicht dem gleich Vielfachen von B gleich, oder das gleich Vielfache von A ist nicht gleich B: es ist $C=mD$, aber $A\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}mB$; oder es ist $nC=D$, aber $nA\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}B$.

Aus den Fällen $C=mD$, aber $A<mB$; $nC=D$, aber $nA<B$; ergiebt sich die zweite Folgerung nr. 2. aus §. 44. nr. 1. 2.

Und aus den Fällen $C=mD$, aber $A>mB$; $nC=D$, aber $nA>B$; ergiebt sich die erste Folgerung nr. 2.; indem nun wieder $2C=2mD$, $2A>2mB$; $2nC=2D$, $2nA>2B$ (§. 14. 17.).

Ist weder A einem Vielfachen von B, noch C einem Vielfachen von D gleich; und auch, weder ein Vielfaches von A gleich B, noch irgend ein Vielfaches von C gleich D: so beruhet das weitere auf der Vergleichung der gleich Vielfachen von A und C, mit den gleich Vielfachen von B und D.

§. 49. Hiebei ergiebt sich nun entweder: dafs Vielfache von A Vielfachen von B, und zugleich die eben so Vielfachen von C, wie von A, den nämlichen Vielfachen von D, wie von B, gleich sind; oder nicht: d. h. es sind entweder zugleich $nA=mB$, und $nC=mD$ für einige ganze Zahlen n, m; oder für keine.

In dem ersten Falle hat die Folgerung §. 48. nr. 1. wieder statt, vermöge §. 31. nr. 3.

In dem zweiten ist entweder, für gewifse ganze Zahlen n, m, zwar $nA=mB$, aber nicht zugleich auch $nC=mD$, sondern $nC\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}mD$; oder zwar $nC=mD$, aber nicht zugleich $nA=mB$, sondern $nA\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}mB$; oder es ist weder irgend ein Vielfaches von A einem Vielfachen von B, noch irgend ein Vielfaches von C einem Vielfachen von D gleich.

Ist nun $nA=mB$, aber $nC>mD$; oder $nC=mD$, aber $nA>mB$: so hat man gleich Vielfache von A und C, und gleich Vielfache von B und D, die so beschaffen sind; dafs entweder das Vielfache von C gröfser ist, als das von D, das Vielfache von A aber nicht gröfser ist, als das von B; oder dafs umgekehrt, das Vielfache von A gröfser ist, als das von B, hingegen das Vielfache von C nicht gröfser ist, als das von D: wie §. 48. nr. 2. 3.

Und wenn $nA=mB$, aber $nC<mD$; oder $nC=mD$, aber $nA<mB$: so haben die nämlichen Folgerungen statt, vermöge §. 44. nr. 3.

Endlich wenn weder irgend ein nA irgend einem mB, noch irgend ein nC irgend einem mD gleich ist: so sind entweder immer zugleich $nA\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}mB$ und $nC\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}mD$;

oder es ist für gewifse Zahlen n, m, indem $nA\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}mB$, im Gegentheil $nC\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}mD$.

Der erstere von diesen Fällen ist wieder in der Folgerung §. 48: nr. 1.; und der zweite in den Folgerungen §. 48. nr. 2. 3. begriffen.

§. 50. Die Erfolge der Vergleichung sowohl der Gröfsen A und C mit den gleich Vielfachen von B und D, als der gleich Vielfachen von A und C, beides mit den Gröfsen B und D, und mit den gleich Vielfachen derselben, reduciren sich also auf die zwei allgemeine in den zwei Euclidischen Definitionen 5. 7. angegebenen Resultate.

1tens. Entweder sind immer zugleich $pA\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}qB$, $pC\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}qD$; was auch p, q für ganze Zahlen (mit Ausschlufs der Einheit) bedeuten.

2tens. Oder es ist für einige ganze Zahlen n, m (wieder mit Ausschlufs der Einheit) $nA>mB$, aber nC nicht $>$ sondern $\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}mD$.

Das Resultat: $nC>mD$, aber $nA\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}mB$; reducirt sich nämlich auf das vorige durch Verwechslung von A und C, B und D.

§. 51. Durch welche technische Benennungen Euclid die Beziehung der Verhältnisse $A:B$, $C:D$, nach jenen zwei Hauptresultaten, der Abkürzung des Vortrags halber, bezeichnen und unterscheiden wollte, war im Grunde willkührlich. Nur mufste er, wenn er in der gemeinen Sprache schon gangbare Worte dazu wählen wollte, dieselben dem Sprachgebrauche und seiner Analogie möglichst genau anpassen.

Das erste Resultat enthält die besonderen Fälle, wo zugleich $nA=mB$, und $nC=mD$: also beides, $A=\frac{m}{n}B$, und $C=\frac{m}{n}D$; mit Einschlufs der Einheit in den Bedeutungen von m und n (§. 48.): in welchen also A die Gröfse B, (sowohl nach der auf das Ganze eingeschränkten Bedeutung, als nach der weiteren Ausdehnung der-

selben auf Theile) eben so vielmal enthält, als C die Gröfse D.

Das zweite Resultat: $nA > mB$, aber $nC \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} mD$; folglich $A < \frac{m}{n} B$, aber $C \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} \frac{m}{n} D$, besagt, wenigstens wenn sowohl A und B, als C und D commensurabel sind, in dem erst angegebenen Umfange: A enthalte B mehrmal, als C die Gröfse D enthält.

So waren für das erstere Resultat die Benennungen einerlei, gleiche, ähnliche Verhältnisse, oder der Ausdruck, A verhalte sich zu B wie C zu D; und für das zweite der Ausdruck, A habe zu B ein gröfseres Verhältnifs, als C zu D, der allgemeinen Bedeutung dieser Worte gemäfs; vielleicht auch schon mit ihrer Anwendung auf Verhältnisse commensurabler Gröfsen, wenigstens auf die einfachsten Fälle derselben, übereinstimmend.

§. 52. Was einerlei und gleiche Gröfsen, verschiedene und ungleiche, gröfsere und kleinere heifsen, hat Euclid nicht definirt; sondern die Bedeutung dieser Benennungen von Gröfsen, als aus dem gemeinen Sprachgebrauche bekannt, angenommen. Dagegen hat er, um den Abgang dieser vielleicht an und für sich nicht genau möglichen Bestimmung zu ergänzen, und den Mifsbrauch unbeschränkter, schwankender Berufung auf den Sprachgebrauch zu verhüten, ausdrücklich in den 1—7. und 9. Axiomen des I. Buchs, die auf Gleichheit und Ungleichheit der Gröfsen überhaupt sich beziehenden Sätze angegeben, deren er sich, als in den gemeinen Begriffen derselben enthalten, in der Folge zu Begründung seiner Schlüsse bedienen werde. Aufser diesen nimmt er in seinen Beweisen Gleich und Ungleich, und in dem letzteren Falle Gröfser und Kleinerseyn, als so entgegengesetzte Eigenschaften homogener Gröfsen an, dafs die Folgerungen allgemein gelten: A ist entweder gleich B, oder gröfser als B, oder kleiner als B; A und B sind gleich, wenn keine von beiden gröfser ist als die andere; A ist gröfser als B, wenn A weder gleich B, noch kleiner als B ist.

§. 53. Gleiche und ungleiche Verhältnisse kennt der gemeine Sprachgebrauch wenigstens nur dunkel, schwankend, und weder in der Bestimmtheit einerseits, noch in der Ausdehnung andrerseits, deren der Mathematiker bedarf.

Indem nun Euclid die Bedeutung der Benennungen Einerlei, Gröfser, für Verhältnisse in seiner 5. und 7. Defin. genau bestimmt: nimmt er zugleich die Verbindlichkeit auf sich, seine Sätze von den Verhältnissen blofs hiernach ohne Einmischung der gewöhnlichen Bedeutung der Worte Einerlei, Gleich, Verschieden, Ungleich, Gröfser, Kleiner, und der darauf sich beziehenden Axiome, abzufassen und zu beweisen. Letztere bleiben hiebei für ihn nur noch zur Anwendung bei den Gleichvielfachen brauchbar, auf deren Gleichheit und Ungleichheit, in der gemeinen Bedeutung, sich seine Definitionen beziehen. Daher beweiset er wirklich in den Sätzen V, 7—11. 13. von Verhältnissen, was er von Gröfsen als Axiome angenommen hatte. Und Rob. Simson (l. c. p. 362. fgg.) tadelt und verwirft mit Recht die nun in den Elementen stehenden Beweise der Sätze V, 9. 10. theils als unvollständig, theils als fehlerhaft und unächt, mit folgender Bemerkung*): *Hujus propositionis* (V, 9.) *demonstrationem dedimus magis explicitam ea, quae in Elementis hactenus habetur. Aliam hujus* (V, 10.) *demonstrationem tradere necessarium fuit: ea enim, quae in editionibus Graecis et Latinis aliisque habetur, legitima non est. Verba enim: major, eadem sive aequalis, minor, de magnitudinibus et rationibus diverso prorsus sensu dicuntur; ut ex Defin. 5. et 7. hujus Libri patet. — Videtur autem, eum, qui demonstrationem decimae, quae jam habetur, posuit vice ejus, quam Eudoxus aut Euclides dederat, deceptum fuisse, transferendo id, quod manifestum quidem est de magnitudinibus, ad rationes: magnitudinem scilicet quamvis non posse simul majorem et minorem esse alia. Quae eidem aequalia, et inter se sunt aequalia, Axioma est maxime evidens, si de magnitudinibus intelligatur. Euclides autem ea non utitur ad ostendendum: rationes, quae eidem rationi sunt eaedem, inter se eastdem esse; sed hoc explicite demonstrat in V, 11. —*

§. 54. Uebrigens folgt aus der obigen Deductio §. 48. fgg., dafs die zwei oder drei Endresultate derselben, mithin auch die darauf bezogenen Benennungen einerlei oder gleicher, gröfserer, kleinerer Verhältnisse, einander eben so entgegengesetzt sind, wie nach dem gemeinen Sprachgebrauche die Benennungen einerlei oder gleicher, gröfserer, kleinerer Gröfsen; daher denn die zuletzt §. 52. von den Gröfsen angeführten Sätze

*) Matthiae p. 55. fg.

auch von Verhältnissen in Euclidischem, seinen Def. 5. 7. gemäfsen, Sinne gelten: wie es in allewege die Sprachanalogie erfodert.

§. 55. Hieron. Saccherius (*Euclides ab omni naevo vindicatus. Mediol.* 1733.) hat p. 115. fgg. in der Absicht aus den Beweisen der Sätze V, 18. XII, 2. die Voraussezung einer vierten Proportionalgröfse zu drei gegebenen wegzuschaffen, einen nicht ganz gerathenen Versuch gemacht, die Deduction §. 49. zu dem Zwecke §. 54. zu gebrauchen; welchen Rob. Simson (l. c. Not. ad V, 18. p. 366. sqq.) *) noch schlechter aufgenommen hat.

Seinen Hülfssatz, oder wie er ihn nennet, Axiom: *Sint quatuor magnitudines A, B, C, D, quarum duae priores in suo proprio genere, ac similiter posteriores, vel in eodem cum prioribus genere, vel in alio quodam suo proprio genere, consistant; dico, rationem tertiae C ad quartam D vel aequalem fore, vel majorem, vel minorem ratione primae A ad secundam B* — zu beweisen, schickt Saccherius voraus: *Sumantur ipsarum A primae et tertiae C quaelibet aequemultiplices E, G; atque item ipsarum B secundae et quartae D duae quaelibet aequemultiplices I, L. Constat primo: rationem ipsius A ad B aequalem fore rationi ipsius C ad D, si vel in uno casu talium assumtarum aequemultiplicium contingat, ut E multiplex primae aequalis sit ipsi I multiplici secundae, et G multiplex tertiae aequalis si ipsi L multiplici quartae* — *Constat secundo: rationem primae A ad secundam B majorem fore ratione tertiae C ad quartam D, si vel in uno casu talium assumtarum aequemultiplicium contingat: ut E multiplex primae excedat ipsam I multiplicem secundae, sed G multiplex tertiae non excedat illam L multiplicem quartae; aut illa E aequalis sit praedictae I (prout ego cum Clavio interpretor), dum alterum G minor est sibi correspondente L* — Und fährt darauf fort: *Vel inter possibiles aequemultiplices primae A et tertiae C, ac simul inter possibiles aequemultiplices secundae B et quartae D, una quaepiam reperitur E multiplex primae A et I multiplex secundae B invicem aequales; ac simul (in eodem casu) una quaedam G multiplex tertiae C aequalis ipsi L multiplici quartae D: vel nusquam talis aequalitas reperitur. Si primum: constat ex jam demonstratis, ita fore A ad B ut C ad D. Sin vero nusquam reperitur ejusmodi*

*) Matthias p. 63 fg.

simul ex utraque parte aequalitas: vel saltem ad alterutram partem reperitur, ut puta ad partem primae A; vel nusquam. Si primum: ergo (ex praemissa Euclidea majoris ac minoris proportionis definitione) habebit A ad B majorem, aut minorem proportionem quam C ad D, prout G multiplex tertiae C minor fuerit, aut major ipsa L multiplici quartae D. Sin vero secundum: ergo ex una quidem parte, v. gr. ad ipsas A primam et B secundam, contingere poterit, ut illa multiplex E minor sit altera multiplici I, dum vice versa ex altera parte illa multiplex G, major est altera multiplici L. Tunc autem (sub eadem Euclidea definitione) ratio primae A ad secundam B erit minor ratione tertiae C ad quartam D: aut vice versa. Igitur demonstratum manet substitutum illud axioma —

Minime, fügt Rob. Simson bei, *sed sine demonstratione manet. Quod enim dicit posse contingere, poterit in numeris casibus nunquam contingere; et propterea demonstratio ejus nulla est. Nam ex. gr. si fuerit A latus et B diameter quadrati, C vero latus et D diameter alterius quadrati: nunquam poterit multiplex ipsius A aequalis esse multiplici ipsius B, nec aliqua ipsius C aequalis alicui ipsius D, ut notum est; tamen nunquam contingere poterit, ut, existente multiplici quadam ipsius A majore, vel minore multiplici quadam ipsius B, multiplex ipsius C vice versa minor, vel major sit multiplici ipsius D; sumtis scilicet ipsarum A, C aequemultiplicibus, et ipsarum B, D aequemultiplicibus. Sunt enim A, B, C, D proportionales.*

Seiner Bemerkung zu folge, hätte Simson den Beweis des Saccherius nicht für ganz untauglich, nur für unvollständig, aber leicht ergänzbar, erklären sollen: indem der von ihm übersehene Fall nur einen zweiten der Gleichheit beider Verhältnisse angibt.

Triftig möchte aber gegen den Beweis, den Saccherius dem ersten seiner vorausgeschickten Sätze beigefügt hat, eingewendet werden, dafs er nicht allgemein gültig sey. Er ist nämlich kurz gefafst folgender: Wenn sowohl $nA=mB$, als $nC=mD$; so ist beides, $A:B$ und $C:D=m:n$ (VII, 19.); folglich $A:B=C:D$ (V, 11.). In dem Satze VII, 19. sind aber A, B, C, D Zahlen: und sein Beweis, insofern er sich zum Theil auf VII, 17. gründet, verstattet nicht, ihn auf jede andere Gröfsen auszudehnen.

Zweitens bekennet Saccherius selbst p. 122. 126.: Die Auslegung und Ausdehnung der 7. Definition in seiner zweiten Prämisse könne blofs Bedürfnisses halber

gemacht zu seyn scheinen. Und die Rechtfertigungen davon p. 122. fg. möchten eben so wenig als der p. 126. fgg. beigefügte Beweis des zweiten Theils jener Prämisse genugthuend seyn.

§. 56. Sonst lassen sich die Sätze §. 54. 55. auch aus den Euclidischen Definitionen 5. 7. mit Zuziehung des Satzes, §. 44. nr. 3. und einiger anderer, die gleich Vielfache betreffenden, herleiten. Nämlich

1stens. Wenn die Verhältnisse $A:B$, $C:D$ unter sich einerlei; also (Def. 5.) immer zugleich $nA\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}mB$, und $nC\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}mD$, sind; folglich niemals weder $nA>mB$, aber $nC\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}mD$; noch $nC>mD$, aber $nA\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}mB$ ist: so kann weder $A:B>C:D$, noch $C:D>A:B$, oder $A:B<C:D$ nach Def. 7. seyn.

2tens. Umgekehrt, wenn weder $A:B>C:D$, noch $C:D>A:B$; so kann,

α) indem $nA=mB$, weder $nC>mD$ seyn, weil sonst (Def. 7.) $C:D>A:B$ wäre; noch $nC<mD$, weil sonst (§, 44. nr. 3. und Def. 7.) $A:B>C:D$ wäre. Also muſs auch $nC=mD$ seyn.

β) Indem $nA>mB$, wird auch $nC>mD$ seyn: weil wenn $nC\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}mD$ sollte seyn können, $A:B>C:D$ wäre (Def. 7.).

γ) Indem $nA<mB$, muſs ebenfalls $nC<mD$ seyn; da sonst, wenn $nC\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}mD$ wäre, $C:D>A:B$ seyn würde (Def. 7. und §. 44. nr. 3.).

Folglich ist alsdenn immer zugleich $nA\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}mB$, und $nC\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}mD$; also (Def. 5.) $A:B=C:D$.

3tens. Wenn die Verhältnisse $A:B$, $C:D$ nicht unter einander einerlei; also nicht immer zugleich $nA\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}mB$, $nC\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}mD$ sind (Def. 5.): so wird für einige ganze Zahlen n, m

α) Entweder $nC\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}mD$ seyn, indem $nA=mB$ ist: alsdenn ist in dem ersten Falle $C:D>A:B$ (Def. 7.); und in dem zweiten $A:B>C:D$ (§. 44. nr. 3. und Def. 7.).

β) Oder es wird $nC\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}mD$ seyn, indem $nA>mB$ ist: so ist $A:B>C:D$ (Def. 7.).

γ) Oder es wird $nC\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}mD$ seyn, indem $nA<mB$ ist: alsdann ist $C:D>A:B$ (Def. 7. und §. 44. nr. 3.).

4tens. Wenn $A:B>C:D$; also (Def. 7.) für einige Zahlen n, m ist $nA>mB$, aber $nC\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}mD$: so sind

α) nicht für jede Zahlen n, m zugleich $nA\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}mB$, und $nC\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}mD$; also nicht $A:B=C:D$ (Def. 7.).

β) Kann auch alsdenn nicht $A:B<C:D$, oder $C:D>A:B$ seyn; d. h. (Def. 7.) es können für keine zwei ganze Zahlen p, q, seyn $pC>qB$, hingegen $pA\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}qB$.

Denn wegen $nA>mB$, aber $nC\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}mD$ (Vorauss.); ist auch (§. 17. 14.) $p\times nA>p\times mB$, aber $p\times nC\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}p\times mD$, oder $p\times mD\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}p\times nC$.

Und wenn $pC>qD$: so ist auch (§. 17.) $n\times pC$, oder (§. 28.) $p\times nC<n\times qD$.

Also *ex aequo* oder *a fortiori* $p\times mD>n\times qD$.

Daher ebenfalls (§. 27.) $p\times mB>n\times qB$.

Folglich um so vielmehr $p\times nA$ oder (§. 28.) $n\times pA>n\times qB$; und also noch $pA>qB$ (§. 19.).

§. 57. Wenn $nA=nB$, und $nC=nD$ ist: so ist $A=B$, $C=D$ (§. 18.).

Und nun folgt weiter, wenn $pA\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}qB$: weil $qB=qA$ (§. 14.), also nun $pA\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}qA$ ist;

daſs $p\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}q$ (§. 25. 26.); $pC\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}qC$ (§. 23. 24.) und, weil $qC=qD$ (§. 14.), auch $pC\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}qD$ sey.

Der Satz §. 31. nr. 3.: daſs, wenn $nA=mB$, und $nC=mD$ ist, jede Gleichvielfache von A und C irgend Gleichvielfachen von B und D, das von A nämlich dem von B, und das von C dem von D entweder beide gleich, oder beide zugleich gröſser oder kleiner seyen; gilt also auch für die Bedingung $nA=nB$, und $nC=nD$.

§. 58. So folgt auch aus der Bedingung $nA=nB$, aber $nC<nD$, eben so wie §. 44. nr. 3. aus der Bedingung $nA=mB$, aber $nC<mD$: daſs sich ein Gleichvielfaches von A und C, und ein Gleichvielfaches von B und D angeben lassen, so, daſs das Vielfache von A gröſser als das von B, das Vielfache von C aber nicht gröſser als das von D ist.

Wenn nämlich $nA=nB$, aber $nC<nD$, und $nD=nC+E$ ist: so wird

α) wenn $C\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}E$ ist; $nC+C\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}nC+E$, d. h. $(n+1)C\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}nD$ seyn, indem $(n+1)A>nA$ oder nB ist.

β) Wenn $C>E$, aber $C<rE$ ist: so wird $r\times nC+C<r\times nC\times rE$, d. h. $(r\times n+1)C<r(nC+E)$ oder $r\times nD$ seyn; indem $r\times nA+A$ d. i. $(r\times n+1)A>r\times nA$ oder $r\times nB$ ist.

§. 59. Die Resultate §. 49.fg. ergeben sich also auch aus der Vergleichung Gleichvielfacher von A und C mit den nämlichen Gleichvielfachen von B und D; aus der Vergleichung (in Rücksicht auf Gleichheit und Ungleichheit) von nA und nB, nC und nD, eben so wie aus der Vergleichung von nA und mB, nC und mD. Und so ist man berechtiget, den auf beide Definitionen 5, 7 sich beziehenden Ausdruck der 5ten: Gleichvielfache der ersten und dritten, Gleichvielfache der zweiten und vierten Gröſse, *καθ' οποιονουν πολλαπλασιασμον. secundum quamcunque multiplicationem*, auch von Gleichvielfachen aller vier Gröſsen zu verstehen; mithin die Definitionen auch auf dieser ihre gegenseitige Vergleichung anzuwenden.

§. 60. Diesemnach ist 1stens. $A:B=C:D$, wenn $A=B$, und $C=D$: folglich (§. 14.) $nA=nB$, und $nC=nD$ (§. 57. und Def. 5.).

2tens. $A:B>B:D$, wenn $A>B$, aber $C\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}D$; folglich (§. 14. 17.) $nA>nB$, aber $nC\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}nD$ (Def. 7.);

oder wenn $A=B$ aber $C<D$; folglich (§. 14. 17.) $nA=nB$, aber $nC<nD$ (§. 58. und Def. 7.), und

3tens. $A:B<C:D$, oder $C:D>A:B$, wenn $A\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}B$, aber $C>D$; folglich (§. 14. 17.) $nA\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}nB$, aber $nC>nD$ (Def. 7.);

oder wenn $A<B$, aber $C=D$; folglich (§. 14. 17.) $nA<nB$, aber $nC<nD$ (§. 58. und Def. 7.).

§. 61. Umgekehrt, wenn $A:B=C:D$; so sind zugleich $A\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}B$, und $C\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}D$.

Denn so wie $A\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}B$: ist $nA\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}nB$ (§. 14. 17.); also auch (Vorauss. und Def. 5.) $nC\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}nD$; und daher (§. 18. 19.) $C\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}D$.

Oder 1) wenn $A=B$, kann nicht $C\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}D$ seyn: weil sonst (§. 60. nr. 2. 3.) $A:B\left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\}C:D$ wäre;

2) wenn $A>B$; kann nicht $C\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}D$ seyn: weil sonst (§. 60. nr. 2.) $A:B>C:D$ wäre;

3) wenn $A<B$; kann nicht $C\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}D$ seyn: weil sonst (§. 60. nr. 3.) $A:B<C:D$ wäre,

alles gegen die Voraussetzung $A:B=C:D$ und §. 54. 56. nr. 1.

§. 62. Wenn hingegen $A:B>C:D$: so mufs $C<D$ seyn, wenn $A\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}B$ ist; aber A mufs $>B$ seyn, wenn $C\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}D$ ist.

Denn 1stens. Wenn $A\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}B$ ist; so kann weder $C=D$ seyn: weil sonst (§. 60. nr. 1. 3.) $A:B\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}C:D$ wäre;

noch $C>D$ seyn: weil sonst (§. 60. nr. 3.) $A:B<C:D$ wäre.

2tens. Wenn $C=D$ ist; kann nicht $A\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}B$ seyn: weil sonst (§. 60. nr. 1. 3.) $A:B\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}C:D$ wäre.

Auch, wenn $C>D$ ist; kann nicht $A\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}B$ seyn; weil sonst (§. 60. nr. 3.) $A:B<C:D$ wäre;
alles gegen die Voraussetzung $A:B>C:D$, und §. 54. 56. nr. 4.

§. 63. Verhältnisse, deren Glieder gleich sind, heifsen Verhältnisse der Gleichheit, *rationes aequalitatis*: Verhältnisse hingegen, deren Glieder ungleich sind, heifsen Verhältnisse der Ungleichheit, *rationes inaequalitatis*, und zwar der gröfseren Ungleichheit, *majoris inaequalitatis*, wenn das Vorderglied gröfser ist, als das Hinterglied; der kleineren Ungleichheit, *minoris inaequalitatis*, wenn das Vorderglied kleiner ist, als das Hinterglied.

§. 64. Nach diesen Benennungen besagen die Sätze §. 60.

1stens. Jede zwei Verhältnisse der Gleichheit sind unter einander einerlei.

2tens. Jedes Verhältnifs der gröfseren Ungleichheit ist gröfser, als jedes Verhältnifs der Gleichheit, oder der kleineren Ungleichheit, und jedes Verhältnifs der Gleichheit ist gröfser, als jedes Verhältnifs der kleineren Ungleichheit.

§. 65. Die Sätze §. 61. 62. aber heifsen:

1stens. Zwei gleiche Verhältnisse sind entweder beide *rationes aequalitatis*, oder beide *rationes majoris inaequalitatis*, oder beide *rationes minoris inaequalitatis*.

2tens. Von zwei ungleichen Verhältnissen ist das kleinere *ratio minoris inaequalitatis*, wenn das gröfsere *ratio aequalitatis*, oder *minoris inaequalitatis*, ist; und das gröfsere ist *ratio majoris inaequalitatis*, wenn das kleinere *ratio aequalitatis*, oder *majoris inaequalitatis* ist.

§. 66. Gleichheit zweier Gröfsen wird gewöhnlich nicht unter der Gestalt von Verhältnifs, sondern blofs als Gegensatz unbestimmter Ungleichheit derselben betrachtet, deren Bestimmung durch die Angabe des gegenseitigen Verhältnisses der ungleichen Gröfsen erhalten werde.

Die Folgerung der Verhältnisse ungleicher Gröſsen, die von gewiſsen Bestimmungsstücken abhängen, beruhet auch, wenigstens in ihrer Grundlage, auf vorläufiger, besonders dazu geeigneter Festsetzung der Bedingung ihrer Gleichheit und Ungleichheit. So wird erstlich durch Schüsse, die am Ende auf dem Grundsatz der Congruenz (I. B. Ax. 8.) beruhen, erwiesen: daſs gleich hohe Triangel auf gleichen Grundlinien, gleich, folglich auf ungleichen Grundlinien, ungleich seyen; und nun hieraus (VI, 1.) gefolgert: daſs dergleichen ungleiche Triangel auf ungleichen Grundlinien, sich wie ihre Grundlinien verhalten.

§. 67. Diesemnach ist §. 2. die Erklärung von Verhältniſs nur auf ungleiche Gröſsen bezogen; und §. 3. fgg. die Vergleichung Gleichvielfacher beider Glieder eines Verhältnisses bei Seite gelassen worden; welche Gleichvielfachen ohnehin, bei vorausgesetzter Ungleichheit der Glieder, immer auch ungleich sind, so, daſs das des gröſseren Gliedes gröſser ist (§. 17.).

§. 68. Uebrigens sind nach der Vorstellungsart §. 2. der Exponent eines Verhältnisses der Gleichheit $=1$; der Exponent, oder die kleineren Grenzen des Exponenten eines Verhältnisses der gröſseren Ungleichheit >1; der Exponent, oder die gröſseren Grenzen des Exponenten eines Verhältnisses der kleineren Ungleichheit <1: und umgekehrt, ein Verhältniſs, dessen Exponent $=1$, ist *ratio aequalitatis;* ein Verhältniſs, dessen Exponent selbst, oder eine kleinere Grenze desselben >1, ist *ratio majoris inaequalitatis;* und ein Verhältniſs, dessen Exponent selbst, oder eine gröſsere Grenze desselben <1, ist *ratio minoris inaequalitatis.*

§. 69. Und so ergeben sich nach dieser Vorstellungsart die Sätze §. 60. 61. 62. 64. 65. nach §. 9. 37. fgg. gleichsam als Axiome, wenigstens als bloſse unmittelbare Anwendungen der Axiome von Gleichheit und Ungleichheit der Gröſsen.

§. 70. Diese Art, jene und andere dergleichen Sätze zu folgern, welche überdieſs bei der Anwendung auf Verhältnisse incommensurabler Gröſsen ohne vollständige deutliche Entwicklung unzuverläſsig und schwankend ausfällt, darf in den Euclidischen Vortrag, nach Festsetzung der Definitionen 5. 7. eben so wenig, als die gemeine Bedeutung der Worte Gleich, Ungleich (§. 53.) eingemischt werden.

§. 71. Der Satz §. 61. fehlt in den Elementen; ungeachtet in verschiedenen Beweisen Anwendungen davon vorkommen: und Alphons. Borellius (*Euclides restitutus.* Pisis 1658. p. 126.) machte der 5. Def. des V. Buches den Vorwurf, es lasse sich nicht einmal dieser einfache Satz aus derselben herleiten. S. Barrow l. c. p. 322. Rob. Simson p. 142. 358. fg. *).

*) Matthias p. 49.

IV.

Scholien

zum

fünften Buche der Elemente Euclid's.

Das V. Buch soll nach Einigen von Eudoxus seyn. Barrow Lect. III. 1666. p. 209. She. Σχολιον εις το E. Αδηλε, in Scheubels Ausgabe der Elemente p. 224.; lateinisch in Commandins Ausgabe Fol. 56. b.

Definitionen I. II.

1. *Μερος εσι μεγεθος μεγεθες το ελασσον τε μειζονος, ὁταν καταμετρῃ το μειζον. Πολλαπλασιον δε το μειζον τε ελασσονος, ὁταν καταμετρηται ὑπο τε ελαττονος.* Vgl. B. VII. Definitionen 3. 4. 5.

Man sagt, eine kleinere Gröfse messe eine gröfsere, wenn die kleinere einigemal wiederholt die gröfsere genau hervorbringt, oder eine der gröfsern gleiche gibt; oder wenn die gröfsere die kleinere genau einigemal enthält.

Und eine kleinere Gröfse *C* heifst ein gemeinschaftliches Mafs der gröfseren *A* und *B*: wenn die *C* beide *A* und *B* mifst; das heifst, wenn die Gröfse *C* einige, zwar verschiedene, male wiederholt, beide *A* und *B* genau hervorbringt, oder beiden gleiche gibt. Und alsdenn heifsen die Gröfsen *A*, *B* commensurable (*συμμετρα μεγεθη*). (B. X. Def. 1.).

Wenn von zwei vorgelegten ungleichen Gröfsen die kleinere die gröfsere mifst: so heifst die gröfsere ein Vielfaches der kleineren (*Multiplex, Multiplum*); die kleinere ein Theil (*Pars, Submultiplum*) der gröfseren. Ein solcher Theil kommt demnach heraus, wenn eine

Gröfse in irgend eine Anzahl gleicher Theile getheilt wird. Diese Theile heifsen auch aliquote (irgend wievielte); und werden unterschieden von den aliquanten, welche die Gröfse selbst nicht messen, und aus der Summe einiger ihrer aliquoten Theile bestehen. Euclid unterscheidet in B. VII. und fgg. die aliquoten und aliquanten Theile dermafsen, dafs er die ersteren schlechtweg Theil (μερος); die letzteren Theile (μερη) benennt.

2. Zwei Gröfsen *A*, *B* heifsen von zweien *C*, *D* Gleichvielfache (*æquemultiplae*, *aequemultiplices*): wenn die gröfsere *A* die kleinere *C* genau so vielmal enthält, wie vielmal die *B* die *D* enthält; oder wenn die kleinere *C* genau so vielmal wiederholt werden mufs, um eine der gröfseren *A* gleiche zu geben, wie vielmal die *D* wiederholt werden mufs, um eine der *B* gleiche zu geben. In diesem Falle heifsen auch die Gröfsen *C*, *D* gleichvielte Theile (*partes aequaealiquotae*) der Gröfsen *A*, *B*. Gleichvielfache von gleichvielten Theilen zweier Gröfsen aber heifsen *partes aequealiquantae* dieser Gröfsen. *Partes aequealiquotas* zweier Gröfsen nennt Euclid den nämlichen Theil derselben (*eandem partem*); *aequealiquantas* nennt er die nämlichen Theile (*easdem partes*).

Postulat 4.

„Von jeder gegebenen Gröfse jedes verlangte Vielfache angeben." — Vgl. Simsons Anmerkg. zu V, 5. (Matthias p. 46. fg.)

Euclid fordert stillschweigend, dafs man von jeder vorgelegten Gröfse ein angegebenes Vielfaches im Allgemeinen, nicht unter einer gewifsen bestimmten Form; z. B. wenn ein Quadrat gegeben ist, einen Raum, der ein angegebenes Vielfaches desselben sey, unbestimmt, nicht namentlich wieder ein Quadrat, darstellen oder sich denken könne; was nichts weiter erfordert, als dafs die gegebene Gröfse mehrmalen zu sich selbst hinzugethan werde. Hingegen von einer gegebenen z. B. geraden Linie einen verlangten Theil abschneiden, lehrt er in VI, 9.

Satz A.

„Einerlei oder gleicher Gröfsen Gleichvielfache sind gleich." Folgt aus Ax. 2. des I. B., vermöge dessen, wenn $A=B$,

ist $A+A=B+B$; d. h. $2A=2B$
$2A+A=2B+B$ $\quad 3A=3B$
$3A+A=3B+B$ $\quad 4A=4B$

und so weiter, ohne Grenze; weil, wenn $mA=mB$, auch $mA+A=mB+B$, d. i. $(m+1)A=(m+1)B$ ist, indem m irgend eine (ganze) Zahl bedeutet.

Satz 1. (VII, 5. 6.)

1. *Εαν ῃ ὁποσαȣν μεγεθῃ ὁποσωνȣν μεγεθων, ισων το πληθος, ἑκαστον ἑκαστȣ ισακις πολλαπλασιον· ὁσαπλασιον εστιν ἑν των μεγεθων ἑνος, τοσαυταπλασια εσται και τα παντα των παντων.*

1) Den Beweis in Anwendung auf Linien s. m. in Abhandlung I. §. 5. nr. 2. p. 3. dieses Heftes.

2. Oder: Wenn die Gröſsen A, B, C u. s. w. von ebenso vielen gleichartigen Gröſsen E, F, G u. s. w., je eine von einer, die $m$fachen sind; daher

$$\begin{array}{lrcccccccc} & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & m \\ & A= & E+ & E+ & E+ & E+ & E+ & \ldots & +E \\ \text{und ebenso} & B= & F+ & F+ & F+ & F+ & F+ & \ldots & +F \\ & C= & G+ & G+ & G+ & G+ & G+ & \ldots & +G \end{array}$$

u. s. w.

$$\text{so ist } A+B+C=\left\{\begin{array}{l} E+E+E+E+E+\ldots+E \\ +F+F+F+F+F+\ldots+F \\ +G+G+G+G+G+\ldots+G \end{array}\right.$$

$$= L+L+L+L+L+\ldots+L, \quad \text{wenn } E+F+G=L;$$

mithin das Aggregat $A+B+C$ das $m$fache der Gröſse L, oder der Summe $E+F+G$;

oder $\quad mE+mF+mG=m(E+F+G)$.

3. Man erhält demnach ein Vielfaches einer aus zwei oder mehreren Theilen bestehenden Gröſse, wenn man die Gleichvielfachen dieser Theile nimmt und summirt.

Die hierauf gegründete Erläuterung der gewöhnlichen Praxis der Multiplication eines zusammengetzten Multiplicandus mit einem einfachen Multiplicator s. m. in Abhandlung I. §. 6. Scholion p. 3. dieses Heftes.

Zusätze.

1. Daher wenn $A>B=B+C$;

und daher $\quad mA \quad =m(B+C)$ (Satz A.);

so ist, da $\quad m(B+C) \quad =mB+mC$ (V, 1.):

$$\begin{array}{rll} mA & =mB+mC & \text{(I, Ax. 1.)} \\ & >mB & \text{(I, Ax. 9.)} \end{array}$$

d. h. ungleicher Gröfsen Gleichvielfache sind ungleich; das der gröfsern ist gröfser.

2. Aus Zus. 1. und Satz A. folgt von selbst: Umgekehrt, Gröfsen, deren Gleichvielfache gleich sind, sind gleich: deren Gleichvielfache ungleich sind, ungleich; diejenige gröfser, deren Vielfaches gröfser ist als das Gleichvielfache der andern. Oder mit andern Worten: Gleichvielte Theile gleicher Gröfsen sind gleich; ungleicher Gröfsen ungleich; der Theil der gröfseren gröfser als der gleichvielte Theil der kleineren.

Nämlich 1stens. Wenn $mA = mB$: so ist nicht $A > B$; sonst wäre $mA > mB$ (Zus. 1.) noch $A < B$; oder $B > A$; sonst wäre $mB > mA$, oder $mA < mB$.

2tens. Wenn $mA > mB$; so ist nicht $A = B$: sonst wäre $mA = mB$ (Satz A); noch $A < B$, $B > A$: sonst wäre $mB > mA$, $mA < mB$ (Zus. 1.).

3. Da gleich-aliquante Theile Gleichvielfache gleichvielter Theile sind (Def. I. II. nr. 2.); so gilt vermöge Satz A. und Zus. 1. auch von diesen, was in Zus. 2. von gleichvielten Theilen behauptet wird.

Satz 2.

1. *Εαν πρωτον δευτερου ισακις η πολλαπλασιον και τριτον τεταρτου, η δε και πεμπτον δευτερου ισακις πολλαπλασιον και εκτον τεταρτου· και συντεθεν πρωτον και πεμπτον δευτερου ισακις εσαι πολλαπλασιον, και τριτου και εκτου τεταρτου.*

Allgemeiner: Wenn zwei „oder mehrere" Gröfsen Vielfache der Gröfse C; und ebenso viele andere, jede mit einer von jenen, Gleichvielfache der Gröfse F sind: so sind die ersten zusammen von C, und die letzten zusammen von F gleichvielfach. (Rob. Simson zu V, 2.).

2. Der Beweis reducirt sich auf Ax. 2. mittelst des Satzes: Wenn zwei oder mehrere Gröfsen A, B, G u. s. w. Vielfache einer Gröfse C sind: so ist die Anzahl der in dem Aggregat A, B, G u. s. w. enthaltenen der C gleichen Theile die Summe der Anzahlen der in den einzelnen A, B, G u. s. w. enthaltenen der C gleichen Theile; oder wenn $A = mC$, $B = nC$, $G = pC$; so ist $A + B + G = (m + n + p)C$. Ueberhaupt, wenn die Zahl $l = m + n + p$: so erhält man das $l$fache einer Gröfse C, wenn man das $m$fache, $n$fache, $p$fache derselben zusammen addirt. Die hierauf gegründete Erklärung der gewöhn-

lichen Praxis der Multiplication zweier zusammengesetzter Zahlen s. m. in Abhandlg. I. §. 9. p. 5. dieses Heftes.

3. Der einfachste Fall des Satzes in nr. 2. ist: Wenn zu einem Vielfachen A einer Gröfse C diese Gröfse C selbst hinzugesetzt wird; so ist ihre Summe das nächst höhere Vielfache von C (als das Vielfache A). Und wenn zu Gleichvielfachen zweier Gröfsen C, F, zu jenem die Gröfse C, zu diesem F hinzugefügt wird; so sind die Summen noch Gleichvielfache von C, F.

Zusätze.

1. Wenn m und n gleiche ganze Zahlen sind; so sind mA und nA, als Gleichvielfache derselben Gröfse, gleich (Satz A.).

2. Ist aber $m>n=n+p$: so ist $mA=(n+p)A$ (nr. 1.)
$=nA+pA$ (Satz 2. nr. 2.)
$>nA$ (Ax. 9.)

d. h. verschiedennamige Vielfache von einerlei Gröfse sind ungleich; dasjenige ist gröfser, welches eine gröfsere Zahl zur Benennung hat.

3. Umgekehrt sind Vielfache einer Gröfse, welche gleich sind, Gleichvielfache derselben; d. h. wenn $mA=nA$; so ist $m=n$. Denn es kann nicht eine der zwei Zahlen m gröfser seyn als die andere n; sonst wäre $mA>nA$ (nr. 2.).

Dieses ist eine zweite Converse des Satzes A.

4. Und wenn zwei Vielfache einer Gröfse ungleich sind; so ist das gröfsere ein Mehrfaches als das kleinere; oder wenn $mA>nA$; so ist $m>n$.

Denn es kann weder $m=n$; sonst wäre $mA=nA$ (Zus. 1.),
noch $m>n$, $n>m$ seyn; sonst wäre $nA>mA$ (Zus. 2.), oder $mA<nA$.

5. Sind A und C Gleichvielfache von B und D; und wiederum E und F Gleichvielfache derselben B und D: so wird, je nachdem $A\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}E$ ist, auch $C\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}F$ seyn.

Denn wenn A und C die $m$fachen, E und F die $n$fachen von B und D sind; und wenn

1stens. $A=E$, d. i. $mB=nB$; so mufs $m=n$ (Zus. 3.), daher $mD=nD$ (Satz A); d. i. $C=F$ seyn;

2tens. $A>E$, d. i. $mB>nB$; so mufs $m>n$ (Zus. 4.), daher $mD>nD$ (Zus. 2.), d. i. $C>F$.

3tens. $A<E$, d. i. $mB<nB$; so mufs $m<n$ (Zus. 4.), daher $mD<nD$ (Zus. 2.) d. i. $C<F$ seyn.

Um des folgenden Willen, namentlich für den Beweis des folgenden Satzes G, b. sind hier noch folgende Zusätze zu bemerken:

6. Auch von gleichen Gröfsen ist das Mehrvielfache der einen gröfser als das Wenigervielfache der andern: d. i. wenn $A=B$, und $m>n$; so ist $mA>nB$.

Denn $mA=mB$ (Satz A.); aber $mB>nB$ (Satz 2. Zus. 2.), folglich $mA>nB$.

7. Das Mehrvielfache einer gröfseren Gröfse ist gröfser als das weniger Vielfache der kleineren: d. i. wenn $A>B$, und $m>n$: so ist $mA>nB$.

Denn $mA>nA$ (Zus. 2.), weil $m>n$;
$nA>nB$ (Satz 1. Zus. 1.), weil $A>B$;
folglich $mA>nB$.

8. Wenn gleicher Gröfsen Vielfache gleich sind; so sind sie Gleichvielfache: sind sie aber ungleich, so ist das gröfsere Vielfache ein Mehrvielfaches; d. i.

1stens. Wenn $A=B$, und $mA=nB$; so ist $m=n$; denn wäre die eine m gröfser als die andere n; so wäre auch $mA>nA$ (Zus. 6.).

2tens. Ist aber $mA>nB$, während $A=B$; so ist $m>n$.

Nämlich 1) nicht $m=n$; sonst wäre $mA=nB$ (Satz A.)
2) nicht $n>m$; sonst wäre $nB>mA$ (Zus. 6.).

9. Wenn das Vielfache einer kleineren Gröfse eben so grofs oder noch gröfser ist als ein Vielfaches der gröfsern; so ist es ein Mehrvielfaches. D. i. wenn $B<A$, aber $mB\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}nA$; so ist $m>n$. Denn es ist

1) nicht $m=n$; sonst wäre $nA>mB$, da $A>B$. (Satz 2. Zus. 1.)
2) nicht $n>m$; sonst wäre, da auch $A>B$ ist, $nA>mB$ (Zus. 7.).

10. Wenn ein Vielfaches einer Gröfse einem Mehrvielfachen einer andern gleich oder noch gröfser ist: so ist die erste Gröfse gröfser als die zweite. D. i. wenn $m<n$, und $mA\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}nB$; so ist $A>B$. Denn es ist

1) nicht $B=A$; sonst wäre, da $n>m$, $nB>mA$ (Zus. 6.)
2) nicht $B>A$; sonst — — — — $nB>mA$ (Zus. 7.).

Satz 3.

1. *Εαν πρωτον δευτερε ισακις η πολλαπλασιον και τριτον τεταρτε, ληφθη δε ισακις πολλαπλασια τε πρωτε και τριτε· και δι' ισε των ληφθεντων εκατερον εκατερε ισακις εσαι πολλαπλασιον, το μεν τε δευτερε, το δε τε τεταρτε.*

2. Ist ein besonderer Fall von Satz 2.

In Satz 2. wird gezeigt: Wenn von zweien Gröfsen C, F irgend-welche Gleichvielfache, von jeder gleichviele genommen sind: so sind auch die Summen der Gleichvielfachen beider Gleichvielfache von den nämlichen Gröfsen C, F: nämlich (*Fig. zu Lor. Uebers.*)

wenn $A=mC, B=nC, G=pC$ u. s. w.
und $D=mF, E=nF, H=pF$ } indem m, n, p irgend welche ganze Zahlen bedeuten:

so ist sowohl $A+B+G=(m+n+p)C$,
als $D+E+H=(m+n+p)F$.

In Satz 2. werden die Zahlen m, n, p u. s. w. als einander gleich angenommen; demnach A, B, G u. s. w.; D, E, H u. s. w. als beziehungsweise Gleichvielfache, jene von C, diese von F; und $A=B=G$ u. s. w., $D=E=H$ u. s. w. (Satz A): daher die Zahl $m+n+p$ u. s. w. ein Vielfaches, das Dreifache, Vierfache u. s. w. von m; und $A+B+G$ u. s. w., $D+E+H$ u. s. w. beziehungsweise Gleichvielfache von C, F; nämlich so vielfache, wie vielfach die Summe $m+n+p$ u. s. w. von m ist.

3. Da $mA = \overset{1}{A}+\overset{2}{A}+\overset{3}{A}+\overset{4}{A}+\overset{5}{A}+\ldots+\overset{m}{A}$
so ist $n\times mA = n(A+A+A+A+A+\ldots+A)$
$= nA+nA+nA+nA+nA+\ldots+nA$
$= m\times nA$;

d. h. das $n$fache des $m$fachen einer Gröfse ist dem $m$fachen des $n$fachen derselben gleich.

So erhält man das 3ofache einer Zahl, wenn man von ihrem Dreifachen das Zehenfache, oder von ihrem Zehenfachen das Dreifache nimmt.

Dafs einerlei Product herauskomme, man mag die Zahl m mit n, oder die Zahl n mit m multipliciren, beweist Euclid in VII, 16.

Satz 5.

1. *Εαν μεγεθος μεγεθε ισακις η πολλαπλασιον, οπερ αφαιρεθεν αφαιρεθεντος· και το λοιπον τε λοιπε ισακις εσαι πολλαπλασιον, οσαπλασιον εσι το ολον τε ολε.*

Ist Converse von Satz 1., auf welchen auch der Beweis reducirt wird.

2. Beweis: „Man setze CG so, dafs AE von CF, und CB von CG ein Gleichvielfaches seyen;" d. h. dafs, aus wie viel Theilen gleich CF die AE besteht, aus ebenso viel Theilen gleich CG die EB bestehe: folglich da EB gegeben ist, müfste CG genommen, „gesetzt" werden der sovielte Theil von EB, der wie vielte Theil die gegebene CF von der gegebenen AE ist. Die Construction von CG erfordert also Theilung der gegebenen EB in eine angegebene Anzahl gleicher Theile: welche doch weder vorher gelehrt, noch in den Elementen als Postulat angenommen wird (S. I, 9. 10. III, 30. VI, 9.). Dieſs widerspricht aber dem sonstigen Verfahren Euclid's bei der Vorbereitung seiner Beweise. Vergl. I, 3. 5. 6. I, 11. 13. I, 23. 24. I, 31. 32. I, 46. 47. III, 1. fgg., ferner die Beweise von V, 6. VII, 7. 8. und Rob. Simsons Anmerkg. zu V, 5. in Matthias Uebersetzung p. 46. fg., wo auch der ächte Beweis vorgetragen wird.

3. Aechter Beweis. Construction mittelst Post. 4. Bew. aus Satz 1. A. Ax. 3. Satz 2. Zus. 3. (Simson a. a. O.)

4. Unmittelbare Beweise ähnlich denen von Satz 1.

a) durch Linien. Es seyen Aa, Bb (*Fig.* 1.) Gleichvielfache der ungleichen Gröfsen L, M, von welchen $L > M$; und daher $Aa > Bb$ (Satz 1. Zus. 1.):

mithin seyen in Aa so viele Theile Ad, de, eA, jeder $= L$,
als in Bb - - - Theile Bf, fg, gb, jeder $= M$
enthalten:

so werden (I. B. Ax. 3.) sowohl $Aa - Bb$
als $de - fg$ $\Big\}$ $= L - M$ seyn.
und $ea - gb$

Folglich, da die Partialüberschüsse $Aa - Bb$, $de - fg$, $ea - gb$, zusammengenommen den Ueberschufs der ganzen Aa über die ganze Bb ausmachen: so ist dieser von dem Ueberschufs $L - M$ so vielfach, wie vielfach Aa von L, und Bb von M ist.

b) Oder wenn die Gröfsen A, B von den ungleichen Gröfsen E, F, von welchen $E > F$, die $m$fachen sind, d. h.

wenn $A = \overset{1}{E}+\overset{2}{E}+\overset{3}{E}+\overset{4}{E}+\overset{5}{E}+\ldots+\overset{m}{E}$

und $B = F+F+F+F+F+\ldots+F$

so wird $A-B=\begin{cases} E+E+E+E+E+\ldots+E \\ -F-F-F-F-F-\ldots-F \end{cases}$

$=N+N+N+N+N+\ldots+N$, wenn $N=E-F$;

mithin ist der Rest $A-B$ das $m$fache des Restes $E-F$;

oder $mE-mF=m(E-F)$.

D. h. Man erhält ein verlangtes Vielfaches einer Gröfse N, die der Unterschied zweier gegebenen ungleichen Gröfsen E, F ist, wenn man von dem angegebenen Vielfachen der gröfseren E das Gleichvielfache der kleineren F abzieht.

Satz 6.

1. *Εαν δυο μεγεθη δυο μεγεθων ισαχις η πολλαχλασια, και αφαιρεθεντα τινα των αυτων ισαχις η πολλαπλασια· και τα λοιπα τοις λοιποις ητοι ισα εσιν, η ισαχις αυτων πολλαπλασια.*

2. Der Beweis des Satzes wird auf Satz 2. zurückgeführt, dessen Converse er ist; auf ähnliche Weise, wie der ächte Beweis des 5ten auf den ersten.

Damit AG, CH (*Fig. d. Lorenz. Uebers.*), die Gleichvielfachen der Gröfsen E, F, von der nämlichen Gröfsen Gleichvielfachen AB, CD sich hinwegnehmen lassen; mufs $AB>AG$, $CD>CH$; mithin AB, CD mehrvielfache der E, F seyn, als AG, CH (Satz 2., Zus. 4.). Es können aber AB, CD entweder die nächst-höheren Vielfachen von E, F seyn als AG, CH (vgl. Satz 2., nr. 3.), oder höhere Vielfache; d. h. wenn die AG, CH die $m$fahen der Gröfsen E, F sind, so können die AB, CD entweder die $(m+1)$fachen, oder die $(m+n)$fachen derselben seyn. Daher die zwei Fälle der Consequenz des Satzes 6. Den Beweis des 2ten Falls supplirt Rob. Simson: she. Matthias Ausz. p. 47. fg.

3. Unmittelbarer Beweis:

1stens. Wenn von

$AB=\overset{1}{E}+\overset{2}{E}+\overset{3}{E}+\ldots+\overset{m}{E}+\overset{m+1}{E}$ u. ebso. von $CD=\overset{1}{F}+\overset{2}{F}+\overset{3}{F}+\ldots+\overset{m}{F}+\overset{m+1}{F}$

weggenommen wird

$AG=E+E+E+\ldots+E$ $\quad$ $CH=F+F+F+\ldots+F$

so bleibt

$GB=E$ $\quad$ $HD=F$

2tens. Wenn von

$$AB = \overset{1}{E}+\overset{2}{E}+\overset{3}{E}+\ldots+\overset{m}{E}\quad \overset{m+1}{+E}+\overset{m+2}{E}+\ldots+\overset{m+n}{E}$$

weggenommen wird

$$AG = E+E+E+\ldots+E$$

so bleibt

$$GB = \overset{1}{E}+\overset{2}{E}+\ldots+\overset{n}{E};$$

und ebenso von

$$CD = F+F+F+\ldots+\overset{m}{F}\quad \overset{m+1}{+F}+\overset{m+2}{F}+\ldots+\overset{m+n}{F}$$

weggenommen

$$CH = F+F+F+\ldots+F$$

bleibt

$$HD = \overset{1}{F}+\overset{2}{F}+\ldots+\overset{n}{F}.$$

4. Der einfachste Fall ist, wenn von Gleichvielfachen der Gröfsen E, F die Gröfsen E, F selbst weggenommen werden. Alsdenn sind die übrigbleibenden Gröfsen entweder den Gröfsen E, F gleich, wenn sie von den Zweifachen weggenommen worden; oder sie sind die nächstniedrigeren Gleichvielfachen der Gröfsen E, F, als die, von welchen sie weggenommen worden, wenn diese höhere Vielfache als die Zweifache sind.

5. Symbolisch drückt man sich zwar aus: das $n$fache einer Gröfse vom $m$fachen derselben weggenommen, lasse zum Rest das $(m-n)$fache derselben, den Fall, da $m-n=1$, nicht ausgeschlossen. Aber Euclid, der sich an die eigentlichen Ausdrücke hält, enthält sich, das Einfache unter den Vielfachen, die Einheit unter den Zahlen zu begreifen. S. B. VIII. Def. 1. 2.

Definitionen 3. 4.

1. *Λογος εστι δυο μεγεθων ὁμογενων ἡ κατα πηλικοτητα προς ἀλληλα ποια σχεσις.*

Λογον ἐχειν προς ἀλληλα μεγεθη λεγεται, ἁ δυνατα πολλαπλασιαζομενα ἀλληλων ὑπερεχειν.

2. Durch Verhältnifs zweier gleichartigen, oder in Absicht auf Gleichheit und Ungleichheit mit einander vergleichbaren Gröfsen, (welche Glieder (*termini*) des Verhältnisses heifsen; nämlich die erstere, welche auf die andere bezogen wird, das Vorderglied (*antecedens*); letztere das Hinterglied (*consequens*)), im allgemeinsten Sinne genommen, wird verstanden irgend eine durch Vergleichung derselben mit einander sich ergebende Art, die eine derselben aus der andern zu folgern. Durch den Satz IV, 10. z. B. wird die Frage: welches Verhältnifs die Grundlinie und der Schenkel eines gleichschenklichten Dreiecks zu einander haben, dessen Winkel an der Grundlinie jeder das Doppelte von dem Winkel an der Spitze seyen? so

beantwortet: Das Quadrat der Grundlinie ist gleich dem Rechteck aus dem Schenkel und dem Unterschiede des Schenkels und der Grundlinie.

3. Die einfachsten dergleichen Arten sind, da man die Gröſsen selbst unmittelbar, ohne vorhergehende Combination und Umgestaltung, mit einander vergleicht, und eine durch die andere bestimmt durch die Angabe: entweder um wie viel die eine die andere übertreffe oder von ihr übertroffen werde; oder wie vielmal die eine die andere enthalte oder in ihr enthalten sey. Die ersteren pflegt man **arithmetische**, die letzteren **geometrische** Verhältnisse zu nennen.

„*Cur την κατα το ὑπερεχειν και ελλειπειν χεσιν „arithmeticam rationem nonnulli appellárint, non jam dis„putabo*", bemerkt Barrow (*Lectt. mathemat. habitae anno* 1664. 1666. Londini 1684. *Lect.* II. *anno* 1666. p. 199.); „*res quippe controversa est: tantum inde sic denominatam „videri dicam, quod analogiam quandam*[1]) *veteres arithme„ticam appellarint — Verum apud Graecos nusquam re„perio* λογον *aliquem arithmeticum. Semper ii quantorum „*λογον *contradistinguunt ab eorum differentia, quam signi„ficant vocabulis* διαφορα *et* ὑπεροχη; *nec raro* διασημα „*nuncupant — Λογον autem (ut opinor) perpetuo designant „illam quantorum* χεσιν, *quae dici solet ratio geometrica, „vel ratio simpliciter. Apud omnes enim, cum ratio poni„tur* απολυτως *et ab epitheto libera, ratio intelligitur geo-*

1) Nämlich *Μεσοτητα*. In Pappi *Collect. Mathemat.* (Pisauri 1588.) Lib. III. Definitionen nach Problem II. (Fol. 7. b. fg.) «*Differt medietas ab analogia. Nam, si quid est analogia, hoc «et medietas est; sed non contra. Medietates enim tres sunt: «arithmetica, geometrica et harmonica. Arithmetica quidem «medietas dicitur, quando, tribus existentibus terminis, medius «unum extremorum pari excessu quantitate superat, et a reliquo «superatur, quando fit ut primus terminus ad se ipsum, ita pri«mus excessus ad secundum. Geometrica medietas, quae proprie «analogia dicitur, quando fit ut medius terminus ad unum ex«tremum, ita reliquus ad medium; aliter quando fit ut primus «terminus ad secundum, ita primus excessus ad secundum. Har«monica autem medietas est, quando medius terminus eadem «parte et superat unum extremorum, et a reliquo superatur; vel «quanto fit ut primus terminus ad tertium, ita primus excessus «ad secundum.*» Man vergleiche, was Joach. Camerarius in seiner *Logistica* pag. F. 5. und in der *Explicatio Lib. II. Nicomachi.* pag. P. 4. aus einigen griechischen Schriften, besonders aus Nicomachi *Arithmet.* anführt.

„*metrica*[2]), *hoc est, ea* χρσις, *juxta quam unum quantum* „*alterius totuplum, vel quasi totuplum concipitur.*"

4. Wie vielfach eine Zahl *A* von einer andern *B* sey, ergibt sich durch Division jener mit dieser, und der gefundene Quotient, er sey eine ganze Zahl oder ein Bruch, und dieser ein ächter oder ein unächter, d. i. der Summe einer ganzen und einer gebrochenen Zahl gleichgeltender, wird gemeinhin[3]) Exponent oder Benenner (*Denominator*) des Verhältnisses der Zahl *A* zur Zahl *B* genannt (Clavii *Element. Euclidis.* Francof. 1607. P. I. p. 384. Vergl. Pfleiderers *Scholien zu B. VI. der Elemente Euclids* Not. 5. ad §. 200.). Im ersten Falle sagt man, die Zahl *A* sey einem Vielfachen der Zahl *B* gleich; im andern, sie sey einem oder einigen aliquoten Theilen der Zahl *B* gleich; *A* sey $=mB$, oder $=\frac{1}{n}B$, oder $=\frac{m}{n}B$.

Da $nA=B$ ist, wenn $A=\frac{1}{n}B$,

und $nA=mB$, wenn $A=\frac{m}{n}B$; so kann man sagen, das (geometrische) Verhältnifs zweier Zahlen werde bestimmt durch die Untersuchung: welches Vielfache der einen der andern gleich sey, oder welche Vielfache der zwei Zahlen einander gleich seyen. Der letztere Begriff läfst sich adäquater als der erstere auf jede zwei commensurable Gröfsen anwenden, und ist dem Geiste des V. Buchs Euclids angemessener.

5. Aber zwei incommensurable Gröfsen *A*, *B*; z. B. zwei blofs in Quadrat (δυναμει), nicht in Länge commensurable gerade Linien, wie die Diagonale und die Seite eines Quadrats, die Höhe und die Seite eines

---

2) Joh. Wallis in den *Opp. Mathemat.* Pars I. (Oxonii 1657.) p. 228. «*Quod nonnullis placet, ut et differentia vocetur ratio arithmetica; et ratio simpliciter sumta, ratio geometrica, non mihi admodum placet: cum* λογον (*sive rationem, sive proportionem libeat interpretari*) *non nisi de ea, quam vocant rationem geometricam, apud Euclidem usurpari video, nescio an apud veterum quemvis alium; quod et de proportionis voce perinde intelligendum videtur.*» S. Kästners *Anfangsgr. der Arithm. und Geom.* 4te Aufl. V. Kap. §. 3. — Karstens *Lehrbegr. d. Mathem.* I. Thl. 2te Aufl. §. 168. p. 159.

3) Kästner a. a. O. §. 26. «Der Exponent oder Name eines Verhältnisses heifst die Zahl, welche andeutet, wie vielmal das Vorderglied im hintern enthalten ist.»

gleichseitigen Dreiecks, lassen eben deswegen, weil sie gar kein gemeinschaftliches Mafs haben, auch keinen genauen Exponenten ihres Verhältnisses zu einander, oder keine Gleichsetzung eines Vielfachen der einen Gröfse mit der andern oder einem Vielfachen der andern zu; sie verstatten blofs Angabe immer engerer und engerer Gränzen, zwischen welchen der fingirte Exponent ihres Verhältnisses eingeschlossen sey; Angabe zweier unmittelbar auf einander folgender Vielfachen der einen, zwischen welche ein angegebenes Vielfache der andern falle.

So da das Quadrat der Diagonale eines Quadrats das Doppelte des Quadrats der Seite ist, mithin die erstere $\frac{200}{100}, \frac{20000}{10000}, \frac{2000000}{1000000}$ u. s. w. des letztern ist: so ist die

Diagonale $\left.\begin{matrix} > \frac{14}{10}, & \frac{141}{100}, & \frac{1414}{1000} \\ < \frac{15}{10}, & \frac{142}{100}, & \frac{1415}{1000} \end{matrix}\right\}$ u. s. w. der Seite: oder das

10fache der Diagonale ist > 14fache u. < 15fache } der Seite.
100fache — — — — > 141fache u. < 142fache }
1000fache — — — — > 1414fache u. < 1415fache }
u. s. w.

4) Das Zeichen $\sqrt{2}$, womit man den Exponenten des Verhältnisses der Diagonale eines Quadrats zu seiner Seite unter dem Namen einer Irrationalzahl (*numeri surdi*) gewöhnlich bezeichnet, und ähnliche Zeichen, lassen sich zwar bequem als Abkürzungen beim Schreiben und bei symbolischer Darstellung der Rechnungen gebrauchen; aber, da es ihnen an Praecision fehlt, wie Mich. Stifel (*Arithm. int.* Lib. II. Cap. I. p. 103.) sagt, so sind sie zu Consequenzen und Beweisen aus den Axiomen des I. Buchs der Elem., welche bestimmte und eigentlich sogenannte Gröfsen voraussetzen, regelmäfsig nicht zu gebrauchen.

Ebenso stellt das Zeichen $\frac{A}{B}$ des Exponenten des Verhältnisses der Zahl A zur Zahl B, zu Bezeichnung des Exponenten des Verhältnisses jeder zwei gleichartiger Gröfsen ausgedehnt, zumal wenn die Gröfsen A, B incommensurabel sind, keinen deutlich zu begreifenden Quotienten dar. «*Quoti vero*», sagt Barrow (Lect. VIII. p. 332.) «*sub confussione quadam «imaginarii*» — wann oder wie solche einander gleich seyn mögen, so dafs es mit der Allgemeinheit der Schlüsse, zu welchen sie gebraucht werden, seine Richtigkeit habe (Lect. VI. p. 289.); «*haud ita facile in promtu, discernere vel* ἀποδεικτικῶς *ostendere.*»

6. Diesem gemäfs bestimmt die Def. 4. den Begriff von Gröfsen, von welchen man sage, dafs sie ein Verhältnifs zu einander haben, oder gleichartiger Gröfsen, blofs durch diesen Character: dafs ein Vielfaches der einen ein Vielfaches der andern übertreffen könne. Dieser Charcter begreift auch diejenigen Fälle in sich, da einem Vielfachen der einen Gröfse die andere mit ihr commensurable selbst, oder ein Vielfaches von dieser gleich ist: indem wenn $A=mB$, oder $nA=B$, oder $nA=mB$ ist, alsdenn $2A>mB$, oder $2B>nA$, oder $2nA>mB$, $2mB>nA$ ist.

Postulat 5.

7. Diese Definition schliefst das Postulat in sich, welches die Beweise der Sätze V, 8. X, 1. voraussetzen, and Clavius (T. II. p. 206.) dem 10ten Buch der Elemente ausdrücklich vorausschickt: Jede Gröfse läfst sich so vielmal nehmen (vervielfachen), bis sie jede gegebene gleichartige Gröfse übertrifft. Archimedes im I. B. von Kugel und Cylinder, Lehns. 5., hat die speciellere Annahme: *Των ανισων γραμμων, και ανισων επιφανειων, και ανισων στερεων το μειζον τε ελαττονος υπερεχειν τοιετῳ, ὁ συντιθεμενον ἑαυτῳ δυνατον εστιν υπερεχειν παντος τε προτεθεντος των προς αλληλα λεγομενων.* —

8. Noch ist die Frage: Was bedeuten die Worte *κατα πηλικοτητα προς αλληλα ποια σχεσις*? Heifst *κατα πηλικοτητα*: secundum quantitatem? oder secundum multiplicitatem, quotitatem? *Ποια*: irgend welche, quaedam? oder welche bestimmte, qualis? bezieht sich die Definition auf Verhältnifs überhaupt, oder auf geometrisches? Ist sie ächt oder unächt?

Das *Σχολιον Αδηλε*, welches lateinisch übersetzt bei Commandin (*Element. Euclid.* Fol. 57. b.), griechisch nach Dasypodius Ausgabe bei Meibomius (*De proport. Dialog.* p. 10. sqq.) steht, enthält darüber folgende Bemerkungen: *Το κατα πηλικοτητα προσεθηκεν, ινα χωριση των απειρων μεγεθων. Πηλικοτης γαρ το περας εστι τε συνεχους ποσε· και ποσοτης, τε διωρισμενε. Το γαρ διωρισμενον ποσον, ε μερεθος· πληθος γαρ. Το δε, ποια σχεσις, ὁτι πεντε εισι τα ειδη των σχεσεων* [5]). *Λεγεται δε και αλλη σχεσις κατα το υπερεχειν και ελλειπειν.*

5) Multiplex, superparticularis, superpartiens, muliplex superparticularis, multiplex superpartiens.

Und zur Definition 4. setzt es bei: *Επι μεν των αριθμων πας λογος ρητην εχει ποσοτητα· επι δε των μεγεθων εσι τις λογος, ος ε δυναται ρηθηναι αριθμῳ. Εσι γαρ τινα, ων μονη μεν γινωσκεται ἡ προς το ἑτερον ὑπεροχη, ἡ δε ποσοτης εσιν αγνωστος. Ταυτα τοινυν λογον λεγεται εχειν της ὑπεροχης, εκετι δε ὁν αριθμος προς αριθμον, τετ' εσι ρητον. Και δια τετο προςεθηκεν εν τῳ ὁρισμῳ τε λογε των μεγεθων, το κατα πηλικοτητα. Ὁ μεν γαρ ρητος και κατα πηλικοτητα, και κατα ποσοτητα εσιν· ε παντως δε ὁ κατα πηλικοτητα και ρητος. Καθολικωτερον εν ὁριζομενος τα των λογων τινα εσιν, επηγαγεν, ἁ δυναται πολλαπλασιαζομενα αλληλων ὑπερεχειν. Εφαρμοζει γαρ και τῳ ρητῳ και τῳ μη ρητῳ —*

Joachim Camerarius (*Explicat. Lib. I. Nicomachi*, p. K. 3. b.) bemerkt: „*Multa definienda sunt copia, id est, eo quod ποσον, id est quantum, dicimus, et magnâ, mole, id est, eo, quod πηλικον, sive quam grande.*" Und in Explicat. Lib. II. Nicomachi, p. 4. b.: „*Est omnis ratio respectus (δυο ὁρων προς αλληλες χεσις); non tamen omnis respectus proprie ratio. Atque ideo fieri potest, ut proportio communiter appelletur, quamvis non sint in numeris eaedem rationes; modo sint respectus iidem. Quemadmodum in arithmetica proportione; in qua respectus iidem tantummodo sunt incrementi. Ut 1, 2, 3. In his enim, etsi qualitatis ratio, quae est geometrica, dissimilis sit (cum sit 2 ad 1 ratio dupla, et 3 ad 2 ratio sesqui): ratio tamen differentiae in eo, quod quantum dicimus, quae est arithmetica, eadem reperitur.*"

Fast im nämlichen Sinn sagt Wallis in *Matthes. universal.* Cap. 15. (*Opp. math.* P. I. p. 211.) „*Comparationem, quae est quoad differentiam, simpliciter ad Quantitatem, πηλικοτητα, referendam esse; at, quae quoad rationem, ad Qualitatem, ποιοτητα. Eo enim respicere videtur, quae apud Euclidem exstat, rationis definitio — Cur enim ποια σχεσις reddatur quaedam habitudo (quod solent interpretetes), non video; mallem, habitudo qualitativa.*" — Und im *Dialogus advers. Meibomium*, p. 7. „*Meibomius, quid illud ποια σχεσις significet, neutiquam sollicitus est; sed exponit, quaedam relatio, vel ad summum, certa quaedam relatio: cum certum sit ex perpetuo illius vocis usu, ποιον qualitatem respiceres; neque tam indefinite aliquam, quam aliqualem, seu potius qualitativam habitudinem hic innui, quae nempe praedicamentum qualitatis spectet. Et quidem in accurate definiente nullo modo ferendum videtur, ut ratio definiatur indefinite relatio quaedam; sed definiendum erat, quaenam relatio. — Nec*

quidem sufficit, quod dixerit Euclides ἡ κατα πηλικοτητα, secundum quantitatem: nam vel των καθ πηλικοτητα σχεσεων sunt varia genera — Relatio nempe secundum excessum et defectum et ipsa quidem est ἡ κατα πηλικοτητα σχεσις; sed non ποια σχεσις: quippe illic solummodo excessus quantitas spectatur, non qualitas; sed quanto sit hoc illo majus, non quantuplo." Sodenn p. 21. sagt er, ihm scheine in V, Def. 3. gemeint zu seyn diejenige „*habitudinem qualitativam, quae sit ex quantitate oriunda, sive quae magnitudinibus competit, non tam secundum quod multa sunt, vel etiam simpliciter magna; quam secundum quod Quanta, sive Quam magna sint.*"

Dagegen bemerkt Is. Barrow (*Lect.* III. p. 226. sqq.) er könne sich nicht leicht überzeugen, dafs eine so subtile Erklärung dem Sinne des Στοιχειωτης gemäfs sey, und sucht a. a. O. p. 222. die Argumente von Wallis durch mehrere Gründe zu entkräften; erklärt sich sodenn p. 220., κατα πηλικοτητα heifse „*quoad quantitatem, hoc est, quoad magnitudinis suae determinationem, vel magnitudinem ipsam determinatam; saltem secundum quod quaeritur, quanta sunt, et respondetur, tanta. Nam μεγεθος πηλικον — nil videtur aliud denotare quam magnitudinem ipsam, quatenus per suam (ut ita loquar) singularitatem determinatur in se, et ab aliis quantis distinguitur. Causa vero, propter quam aliqua magnitudo, vel potius aliquod magnum — tali modo refertur ad aliud magnum, non alia concipi potest, quam ideo quod absolute tantam in se magnitudinem habet; sicut universim omnis relatio fundatur in aliquo absoluto*" —

Aber Ptolemäus wenigstens in *Μεγαλ. Συνταξ.* B. I. Cap. 9., welches die Aufschrift hat: „*Περι της πηλικοτητος των εν τω κυκλω ευθειων,*" nach Georg. Trapezuntius Uebersetzung „*De quantitate rectarum linearum, quae in circulo perducuntur*"; hat das Wort πηλικοτης nicht in der Bedeutung *magnitudo absolute per se determinata* genommen, wie theils seine Behandlung des Gegenstandes, theils die deutliche Darlegung seines Zwecks beweisen, indem er sagt p. 8. „*Προς μεν ουν την εξ ἑτοιμου χρησιν, κανονικην τινα εκθεσιν ποιησομεθα της πηλικοτητος αυτων, την μεν περιμετρον εις τξ διελοντες τμηματα, παρατιθεντες δε τας καθ' ἡμιμοιριον παραυξησεις των περιφερειων ὑποτεινομενας ευθειας, τετ' σει, ποσων ειαι τμηματων ὡς της διαμετρου, δια το εξ αυτων των επιλογισμων φανησομενον ουν τοις αριθμοις ευχρηστον, εις ρκ τμηματα διηρημενης.*" Und p. 11. fg.

„Ἵνα δε εφ' ἑκασης των χρειων εξ ἑτοιμε τας πηλικοτητας ἐχωμεν των ευθειων ἐκκειμενάς, Κανονια ὑποταξομεν ανα εἰχες με, δια το συμμετρον· ὧν τα μεν πρωτα μερη περιεξει τας πηλικοτητας των περιφερειων καθ' ἡμιμοιριον παρηνξημενας, τα δε δευτερα τας των παρακειμενων, ταις περιφερειαις ευθειων πηλικοτητας, ὡς της διαμετρε των ρκ τμηματων ὑποκειμενης."

Ferner bedeuten in der Def. 5. des B. VI. des jetzigen griechischen Textes der Elemente die darin erwähnten Πηλικοτητες λογον nach Theon, Eutocius und dem Verfasser des Scholions über das B. VI., die Exponenten oder Benenner der Verhältnisse, wie wir sie nennen. S. Pfleiderers *Scholien zum VI. B. d. Elem.* Not. 5. 9. 10. 15. Wallis *Dial. adv. Meibom.* p. 26. sqq. 14.

Da nun jene Def. 5. des B. VI. offenbar unächt ist (§. 7. der angef. Scholien; und Not. 7. fg.): so wird, wenn man annimmt, dafs die Def. 3. des V. B. sich auf jene beziehe, diese Def. 5. B. V., welche Rob. Simson in der Anmerkung dazu *) um ihrer, schon von Barrow am Ende von Lect. III. p. 230. fg. bemerkten Unnützlichkeit willen verwirft, auch dadurch der Interpolation verdächtig.

Definitionen 5. 6. 8.

1. Def. 5. Εν τω αυτω λογῳ μεγεθη λεγεται εναι, πρωτον προς δευτερον, και τριτον προς τεταρτον, ὁταν τα τε πρωτε και τριτε ισακις πολλαπλασια των τε δευτερε και τεταρτε ισακις πολλαπλασιων, καθ' ὁποιονεν πολλαπλασιασμον, ἑκατερον ἑκατερε, η ἁμα ἐλλειπη, η ἁμα ἰσα ᾖ η ἁμα ὑπερεχῃ, ληφθεντα καταλληλα.

Def. 6. Τα δε τον αυτον ἐχοντα μεγεθη λογον αναλογον καλειθω.

Def. 8. Αναλογια δ' εσιν ἡ των λογων ὁμοιοτης.

2. Nach dem ersten Begriffe von geometrischem Verhältnifs (nr. 3. fg. zu Def. 3. 4.) sagt man, vier Gröfsen *A*, *B*, *C*, *D* (die entweder alle, oder wenigstens zwei und zwei gleichartig sind) seyen in einerlei Verhältnifs, wenn beide Verhältnisse einerlei Exponenten haben, oder wenn die Exponenten beider beständig zwischen einerlei Grenzen eingeschlossen sind, auf was für gleichvielte Theile der Gröfsen *B*, *D* sich dieselben immer beziehen mögen; wenn $C=mD$, wofern $A=mB$;

*) Matthias p. 36.

$C=\frac{1}{n}D$, wofern $A=\frac{1}{n}B$; $C=\frac{m}{n}D$, wofern $A=\frac{m}{n}B$*); wenn $C>\frac{m}{n}D<\frac{m+1}{n}D$, wofern $A>\frac{m}{n}B<\frac{m+1}{n}B$. Und umgekehrt, wenn die Einerleiheit der Verhältnisse $A:B$, $C:D$ bekannt ist, so wird angenommen, dafs sich schliefsen lasse: es sey zugleich $C=mD$, wenn $A=mB$; $C=\frac{1}{n}D$, wenn $A=\frac{1}{n}B$; $C=\frac{m}{n}D$, wenn $A=\frac{m}{n}B$; es sey $C>\frac{m}{n}D<\frac{m+1}{n}D$, wenn $A>\frac{m}{n}B<\frac{m+1}{n}B$.

Dieses besagt, auf Vielfache bezogen nach dem zweiten a. a. O. angezeigten Begriff von Verhältnifs: es sey $A:B=C:D$, wenn zugleich seyen $A=mB$, und $C=mD$, oder zugleich $nA=B$ und $nC=D$; oder zugleich $nA=mB$, und $nC=mD$; oder zugleich $nA>mB<(m+1)B$, und $nC>mD<(m+1)D$: und umgekehrt lasse sich daraus, dafs $A:B=C:D$, schliefsen, dafs $C=mD$, wenn $A=mB$; $nC=D$, wenn $nA=B$; $nC=mD$, wenn $nA=mB$; $nC>mD<(m+1)D$, wenn $nA>mB<(m+1)B$.

3. Barrow (*Lect.* VI. p. 234. fgg.) macht über die zwei letzteren Definitionen folgende Bemerkungen: „*Rationis aequalitas unico vocabulo (brevitatis et claritatis causa) vocitari solet Analogia* [Vgl. Def. 18. 19.]. *Quae vox extra Mathesin vulgo quamvis denotat congruentiam, conformitatem aut aptam rerum inter se quarumvis correspondentiam: sicut (instando) convenientia sermonis cum regula generali dicitur a Grammaticis analogia; et quae in ratione quapiam communi conspirant, a Logicis dicuntur analoga. Nempe Graecis ανα praepositio rerum identitatem, aequalitatem, aut convenientiam innuit qualemcumque: Exempla suggerunt Evang. Jo. II., Matth. XX., Luc. IX. — Simili fere pacto αναλογον dicuntur bina quanta binis collata, quae λογον habent ανα, congrue vel aequaliter, hoc est, quae rationem habent aequalem: abstracteque rationum ipsarum convenientia talis appellatur αναλογια. Latinis autem usitatius proportionalitas dicitur; distinctionis gratia quia proportio saepius ipsam rationem, τον λογον, designat. Quamquam Cicero, cum in Platonis Timaei versione vocem αναλογια in latinum transfunderet sermonem, adhibuerit*

*) So heifst B. VII. Def. 20.: *Αριθμοι αναλογον εισιν, ὁταν ὁ πρωτος τυ δευτερυ, και ὁ τριτος τυ τεταρτυ, ισακις η πολλαπλασιος, η το αυτο μερος, η τα αυτα μερη ωσιν.*

vocabulum proportio; Fabius autem Quinctilianus [Lib. V.] *αναλογιαν per similitudinem bene censet exprimi. Quapropter Analogia vel Proportionalitas definitur ab Euclide λογων ὁμοιοτης; a Theone Smyrnaeo λογῶν ταυτοτης — Definitones autem istae non sunt εσιωδεις, rei definitae certam aliquam essentialem passionem ex hibentes; sed tandum ονοματωδεις, quid analogiae nomen significet, quadamtenus indicantes: Euclidi saltem tales sunt, ut ex eo satis patet; quod Definitioni 5. (rationem scilicet eandem habentium magnitudinum definitioni) subjecit: Τα δε τον αυτον εχοντα μεγεθη λογον αναλογον καλειῶθω; quae mera est vocabuli αναλογον explicatio. Mox autem, interjectis solum inaequalem rationem habentium definitionibus, Αναλογια δε εσι λογων ὁμοιοτης. Quamobrem Euclidis mentem haud optime capit Borellus, cum existimat, eum hanc velut essentialem et scientificam analogiae definitionem praeponere, cumque censet, ex Euclidis mente rationum similitudinem ceu notam et primam analogiae proprietatem assignari. Nil tale cogitasse videtur is: at cum subinde vox analogiae, vel αναλογον ειναι, rationis aequalitatem concinnius exprimens et concisius, interdum usurpanda videretur; eam, ne quid ignorata discentium facesseret negotii, vel caliginis effunderet, explicatam voluit dare. Quare nec Euclidem merito taxat (taxat, inquam, ex hypothesi, quod Euclides istam definitionem tradiderit), quasi superflue praveque binas ejusdem rei definitiones exhibentem. Nam eandem vel aequalem rationem habentium unicam exhibuit revera definitionem per essentialem quandam ipsorum passionem: quin autem praeterea rationem habentia aequalem appellari αναλογον, et rationum identitatem vel similitudinem istam analogiae quoque nomine designari submoneat, quid, obsecro, justae causae debuit impedire? Imo satis habuit causae, vim declarare vocabuli plerisque forsan ignoti. Fraudi vero fuisse videtur eruditissimo viro, quod in Claviana aliisque Latinis plerisque editionibus analogiae descriptio, loco legitur emota, et anterius protrusa 4tum istic locum occupat, quae jure meritoque Graecis in codicibus 8va numeratur. —"*

4. Reduction der mehreren in nr. 2. enthaltenen Fälle auf die in Def. 5. angegebenen; und Rechtfertigung des mehreren, was diese erfordert, mittelst folgender Sätze:

Satz B.

Wenn $A=mC$ und $C=mD$; oder $nA=B$ $nC=D$; oder $nA=mB$ $nC=mD$;

so sind jede Gleichvielfache von A und C jeden Gleichvielfachen von B und D, das von A nämlich dem von B, und das von C dem von D, entweder beide gleich, oder zugleich gröfser, oder kleiner; d. h. so sind immer zugleich $pA \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} qB$ und $pC \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} qB$, für jede zwei ganze Zahlen p, q: oder so ist nach der Euclidischen Definition, so wie nach der gemeinen nr. 2., $A:B=C:D$.

Beweis. Durch Satz A; Satz I. Zus. 1. Satz 3. 2. Zus. 5. Satz 3. nr. 3. siehe Abhdlg. III. *Deduction der Definitionen* 3. 4. 5. 7. *des V. Buches der Elemente Satz V.* §. 31. 33. p. 71. fg. dieses Heftes

Zusatz. Auch wenn $A=B$, $C=D$; so ist $A:B=C:D$. Denn da unter diesen Bedingungen auch (Satz A.) $mA=mB$, $mC=mD$ ist für jede ganze Zahl m, dieser Fall aber im dritten Theil des Satzes B begriffen ist: so ist vermöge dieses dritten Theils $A:B=C:D$. —

Satz C.

Umgekehrt, wenn $A:B=C:D$ nach Def. 5.; d. h. wenn immer zugleich

$pA \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} qB$, und $pC \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} qD$, für jede ganze Zahlen p, q; und es ist

$A=mB$, oder $nA=B$, oder $nA=mB$, oder $nA>mB<(m+1)B$: so is auch

$C=mD$, $nC=D$, $nC=mD$, $nC>mD<(m+1)D$;

mit andern Worten: und es ist m, $\frac{1}{n}$, $\frac{m}{n}$ der Exponent, oder $\frac{m}{n}$, $\frac{m+1}{n}$ eine Gränze des Verhältnisses, $A:B$: so ist auch m, $\frac{1}{n}$, $\frac{m}{n}$ der Exponent oder $\frac{m}{n}$, $\frac{m+1}{n}$ Gränze des Verhältnsses $C:D$.

Bew. durch Satz A; Satz 3. 1. Zus. 2. s. in der angef. Abhandlg. III. §. 35. p. 73. dieses Heftes.

5. Satz B ist Simsons Satz C: wovon er aber nur den ersten Theil aus Def. 5. erweiset; zu dem Beweis des 2n und 3n aber, aufser dem 1sten Theil, seinen Satz B (*Elem.* V, Satz 4. Zus.) und seinen Zusatz zu Satz 4. gebraucht: übrigens den 3ten besonders in Beziehung auf Zahlen, nach dem Vorgang von Clavius, darthut.

6. Simsons Satz D. ist der erste und zweite Theil von Satz C: wovon er aber jenen durch seinen Zusatz

zu Satz 4, und seinen Satz A; diesen durch den ersten Theil und seinen Satz B (*Elem.* Satz 4. Zus.) beweiset.

7. Def. 6. 8. *Τα δε τον αυτον* u. s. w. — *Αναλογια δ' εστιν* — sind unschicklich durch Def. 7. von einander getrennte Worterklärungen in Beziehung auf Def. 10. 11. und Def. 9. 19. 20. — Barrow Lect. Vol. VII. p. 174—177. Proclus Lib. III. ad I, 5. [in Haubers *Chrestom. geom.* p. 200. nr. 9.] Scaliger ad *Manil.* p. 47. 206. *Ὁμοιος* statt *ισος*.

8. Def. 9. *Αναλογια δε εν τρισιν ὁροις ελαχιστοις εστιν* (*Proportio continua, discreta*) ist blofs eine Bemerkung, wodurch der Uebergang zu Def. 10. eingeleitet wird.

Definition 7.

1. Die Verhältnisse $A:B$, $C:D$ heifsen verschieden, wenn ihre Exponenten ungleich sind, oder nicht immer zwischen einerlei Gränzen fallen.

Und das Verhältnifs $A:B$ heifst gröfser als das $C:D$, wenn A die Gröfse mehrmal enthält, wenigstens enthalten mufs, als C die Gröfse D enthält, oder enthalten kann.

Allgemein: Gröfseres Verhältnifs ist, dessen Exponent gröfser ist als der des andern, oder als die gröfsere Grenze des Exponenten des andern; oder von dessen Exponenten die kleinere Gränze dem Exponenten des andern gleich, oder gröfser ist als die gröfsere Gränze des Exponenten des andern: und umgekehrt.

2. Ausdruck dieser Bedingungen durch Vielfache. — S. d. angef. Abhdlg. III. §. 37—42. p. 74. fgg. dieses Heftes.

3. Reduction derselben auf die einige in Def. 5. angegebene, mittelst folgender Sätze.

Satz D.

Wenn $A=mB$, aber $C<mD$; oder $nA=B$, $nC<B$; oder $nA=mB$, $nC<mD$: so lassen sich immer Gleichvielfache von A und C, und Gleichvielfache von B und D angeben, so dafs das Vielfache von A gröfser ist als das von B, das Vielfache von C aber nicht gröfser ist als das von D.

Bew. durch Post. 5.; Satz A; Satz 1.; Satz 2. nr. 5. Ax. 4. S. die angef. Abhdlg. III. §. 44. Satz VII. p. 75. dieses Heftes.

Zusatz. Auch wenn $A=B$, $C<D$; ist $A:B>C:D$. Denn alsdenn ist für jede ganze Zahl m, $mA=mB$,

$mC<mD$; welcher Fall unter der dritten Bedingung dieses Satzes begriffen ist.

Satz E.

Umgekehrt wenn $A:B>C:D$ nach Def. 7., d. h. wenn unter den Gleichvielfachen von A und C, und den Gleichvielfachen von B und D, ein Vielfaches von A gröfser ist als das von B, das Vielfache von C aber nicht gröfser ist als das von D; nämlich $pA>qB$, aber $pC\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}qD$, für gewifse ganze Zahlen p, q: und

es ist $A=mB$, oder $nA=B$, oder $nA=mB$;
so ist $C<mD$, $nC<D$, $nC<mD$.

Bew. durch Satz A; Satz 1. Zus. 1. 5.; Satz 2. Zus. 4. 2.; Satz 1. Zus. 4. siehe die Abhandlung III. Satz VII. §. 44. p. 75. dieses Heftes.

Zusatz. Auch wenn $A:B>C:D$ und $A=B$: so ist $C<D$. — Denn alsdann ist für jede ganze Zahl m, $mA=mB$ (Satz A); folglich (nach dem dritten Theil dieses Satzes) $mC<mD$; mithin $C<D$ (Satz 2. Zus. 2.).

Satz 7.

1. Wenn $A=B$; so ist $A:C=B:C$.

Denn nun ist $nA=nB$ (Satz A). Folglich wenn $nA\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}mC$; so ist auch $nB\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}mC$ (Ax. 1.).

2. Ebenso ist $C:A=C:B$, wenn $A=B$.

Zusatz.

Gleiche Gröfsen haben zu gleichen Gröfsen einerlei Verhältnifs: d. h. wenn $A=B$, und $C=G$; so ist $A:C=B:G$.

Bew. Ebenso wie für Satz 7.

Satz 8.

1. Erster Fall: $AE<C$ oder EB, d. h. $AB>C$ aber $<2C$.

Constr. 1) FG Vielfaches von AE, das $>D$, nach Post. 5.; wobei $FG=2AE$, wenn $AE\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}D$.

2) $\left\{\begin{matrix}GH\\K\end{matrix}\right\}$ ebenso vielfach von $\left\{\begin{matrix}EB\\C\end{matrix}\right\}$, als FG von AE.

So ist auch FH eben so vielfach von AB, als $\left\{\begin{matrix}FG\\K\end{matrix}\right.$ von $\left\{\begin{matrix}AE\\C\end{matrix}\right.$ (Satz 1.) und $GH=K$ (Satz A).

3) $N=M+D$ das Vielfache von D, welches zunächst größer als K (Post. 5.).

Also M nicht größer, sondern $\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right.K$ oder GH;

Das mithin $GH\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right.M$,

aber $FG>D$ (nr. 1.);

so ist $FH>M+D$ oder N (Ax. 4.); aber K nicht größer sondern $<N$.

Folglich (Def. 7.) $AB:D\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right.C:D$ und $D:C\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right.D:AB$
$FH:N\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right.K:N$ $N:K\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right.N:FH$

2. Andere Darstellung: $A>C=C+E$; und $E<C$; also $A<2C$.

1) Nimm $nE>D$ (Post. 5.), wobei $n=2$, wenn $E\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right.D$.

2) $mD\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right.nC$, aber $(m+1)D>nC$ (Post. 5.);

So ist $nC\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right.mD$
$nE>D$

daher $nC+nE>mD+D$ (Ax. 4.), d. h. $n(C+E)\left\{\begin{matrix}>\\=\end{matrix}\right.(m+1)D$ (Satz 1, A. 2, nr. 5.)

aber $nC<(m+1)D$ (Const.)

also (Def. 7.) $A:D>C:D$ und $D:C>D:A$

indem $nA>(m+1)D$, $nE<(m+1)D$; $(m+1)D>nE$, $(m+1)D<nA$

$A>\frac{m+1}{n}D$, $C<\frac{m+1}{n}D$; $D>\frac{n}{m+1}E$, $D<\frac{n}{m+1}A$.

3. Erläuterung durch Beispiele:

1) $15\frac{3}{7}:8>15\cdot 8$; $8:15>8:15\frac{3}{7}$

nämlich

$19\times 15\frac{3}{7}>36\times 8$, $19\times 15<36\times 8$; $36\times 8>19\times 15$, $36\times 8<19\times 15\frac{3}{7}$,

$15\frac{3}{7}>\frac{36}{19}.8$, $15<\frac{36}{19}.8$. $8>\frac{19}{36}.15$, $8<\frac{19}{36}.15\frac{3}{7}$

$19\times 15\frac{3}{7}=293\frac{1}{7}$; $15\times 19=285$; $36\times 8=288$.

2) Denn

$A = 15\sqrt{2} < 21\frac{1}{2} > 21\frac{6}{29}$, weil $2 = \frac{8}{4} = \frac{168}{84}$

also $2 < \frac{9}{4} > \frac{168}{84}$

$\sqrt{2} < \frac{3}{2} > \frac{41}{29}$

$C = 21$

$A - C$ oder $E < 1\frac{1}{2} > \frac{6}{29}$

nämlich $39 \times 15\sqrt{2} : 8 > 103 \times 8$, $39 \times 21 : 8 < 103 \times 8$

$15\sqrt{2} > \frac{103}{39}8$, $21 < \frac{103}{39}8$

und $8 : 21 > 103 \times 8 > 39 \times 21$, $8 : 15\sqrt{2} < 103 \times 8 < 39 \times 15\sqrt{2}$

$8 > \frac{39}{103}21$, $8 < \frac{39}{103}15\sqrt{2}$

4. Zweiter Fall: $AE \left\{ \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \right\} C$ oder BE; d.h. $AB \left\{ \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \right\} 2C$.

Construct. 1) $\left\{ \begin{matrix} GH \\ K \end{matrix} \right\}$ Vielfaches von $\left\{ \begin{matrix} EB \\ C \end{matrix} \right\}$, das $> D$ (Post. 5.);

wobei $\left\{ \begin{matrix} GH = 2EB \\ K = 2C \end{matrix} \right\}$, wenn $C \left\{ \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \right\} D$.

2) FG ebenso Vielfaches von AE, als $\left\{ \begin{matrix} GH \text{ von } EB \\ K \text{ von } C \end{matrix} \right\}$

also (Satz 1.) FH — — — AB — — —

und (Satz A.) $GH = K$.

3) $N = M + D$ das Vielfache von D, welches zunächst gröfser als FG (Post. 5.), also M nicht gröfser, sondern $\left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} FG$.

Da nun $FG \left\{ \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \right\} M$ aber $< N$

$GH > D$

so ist $FH > M + D$ oder N (Ax. 4.),

und $\left\{ \begin{matrix} K \\ \text{oder } GH \end{matrix} \right\}$ welche $\left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} FG$ (Satz A. 1. Zus. 1.) weil $\frac{C}{EB} \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} \frac{AE}{EB}$ (Voraussz.), sind $< N$ (Ax. 1.)

folglich $AB : D > C : D$, und $D : C > D : AB$

$FH : N > K : N$ $\quad N : K > N : FH$.

5. Andere Darstellung: $A > C = C + E$, und $E \left\{ \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \right\} C$;

also $A \left\{ \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \right\} 2C$.

1) Nimm $nC > D$ (Post. 5.), wobei $n=2$, wenn $C \left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\} D$

2) $mD \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} nE$ aber $(m+1)D > nE$ (Post. 5.).

So ist $nE \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} mD$

$nC > D$

daher $nC+nE > mD+D$ (Ax. 4.)

d. h. $n\left\{\begin{matrix}C+E\\nA\end{matrix}\right\} > (m+1)D$ (Satz 1. A. 2, nr. 5.).

Aber, da $C \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} E$ (Voranss.), also $nC \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} nE$ (Satz A. 1. Zus. 1.),

und $nE < (m+1)D$ (Voraus.)

so ist $nC < (m+1)D$

Folglich

(Def. 7.) $A : D > C : D$ und $D : C > D : A$

$nA > (m+1)D$, $nC < (m+1)D$ $(m+1)D > nC$, $(m+1)D < nA$

$A > \frac{m+1}{n} D$, $C < \frac{m+1}{n} D$ $D > \frac{n}{m+1} C$, $D < \frac{n}{m+1} A$.

6. Erläuterung durch Beispiele:

$D=41$

$A=13\sqrt{3} < 22\frac{5}{4} > 22\frac{5}{11}$, weil $3 = \frac{48}{16} = \frac{363}{121}$

also $3 < \frac{49}{16} > \frac{361}{121}$

$\sqrt{3} < \frac{7}{4} > \frac{19}{11}$

$C=4\sqrt{5} > 8\frac{16}{17} < 19$, weil $5 = \frac{1445}{289} = \frac{80}{16}$

also $5 > \frac{1444}{289} < \frac{81}{16}$

$\sqrt{5} > \frac{38}{17} < \frac{9}{4}$

$A - C = E < 13\frac{55}{68} > 13\frac{5}{11} > C$

$13\sqrt{3} : 41 > 4\sqrt{3} : 41$,

$5\times 13\sqrt{3} > 2\times 41$, $5\times 4\sqrt{3} < 2\times 41$,

$13\sqrt{3} > \frac{2}{5} 41$. $4\sqrt{3} < \frac{2}{5} 41$

$5\times 13\sqrt{3} < 113\frac{5}{4} > 112\frac{5}{11}$;

und $41 : 4\sqrt{3} > 41 : 13\sqrt{3}$

$2\times 41 > 5\times 4\sqrt{3}$, $2\times 41 < 5\times 13\sqrt{3}$,

$41 > \frac{5}{2} 4\sqrt{3}$, $41 < \frac{5}{2} 13\sqrt{3}$

$8\times 4\sqrt{3} > 44\frac{12}{17} < 45$; $2\times 41 = 82$.

Satz 9.

1. Ist Converse von Satz 7.

2. Bew. indirect. Ergänzung desselben. S. Simsons Anmerkung zu Satz 9. (Matthias p. 55. fg.)

Wenn $A:C = B:C$ oder $C:B = C:A$; so ist nicht $A > B$.

Sonst wäre $A:C > B:C$ $\quad C:B > C:A$

d. h. $pA > qC$ und $pB \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} qC$, $\quad qC > pB$ und $qC \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} pA$ (Satz 8.)

Es sind aber, weil $A:C = B:C$; $\quad C:B = C:A$ (Voraus.)

zugleich $pA > qC$, $pB > qC$; $\quad qC > pB$, $qC > pA$ (Def. 5.)

Satz 10.

1. Ist Converse von Satz 8.

2. Bew. direct. S. Simsons Anmerkg. zu Satz 10. Matthias p. 56. fg.

Wenn $A:C > B:C$, $\quad C:B > C:A$;

so ist $pA > qC$, $\quad pB \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} qC$ $\quad qC > pB$, $\quad qC \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} pA$ (Def. 7.)

$qC \left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\} pB$ $\quad pA \left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\} qC$.

Daher in beiden Fällen $pA > pB$ (Ax. 1.)

$A > B$ (Satz 1. Zus. 3.).

3. Bew. indirect: Wenn $A:C > B:C$, oder $C:B > C:A$; so ist

1) Nicht $A = B$. S. Simsons Ergänzung in der Anmerkung zu Satz 10.

Sonst wäre $A:C = B:C$ oder $C:B = C:A$

d. h. zugleich $pA > qC$, $pB > qC$ $\quad qC > pB$, $\quad qC > pA$ (Def. 5.)

gegen die Bedingung und Def. 7.

2) Auch nicht $A < B$, $B > A$.

Sonst wäre $B:C > A:C$ oder $C:A > C:B$

d. h. $nB > mC$, $nA \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} mC$ $\quad mC > nA$, $mC \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} nB$ für gewisse ganze Zahlen n, m.

Da aber $A:C > B:C$ $\quad C:B > C:A$ (Voraus.);

so ist $pA > qC$, $\quad pB \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} qC$ $\quad qC > pB$, $qC \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} pA$ für gewisse p, q.

Daher $npA > nqC$, $\quad npB \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} nqC$ $\quad nqC > npB$, $nqC \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} npA$

$nqC \left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\} npB$ $\quad npA \left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\} nqC$

also $npA > npB$ $\quad npA > npB$

Wenn daher $nB > mC$, $\quad pnB \left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\} pmB$; Wenn daher $mC > nA$, $\quad pmA > pnA$; npA:

so ist $npA \left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\} pmC$ $\quad pnA > pmC$ $\quad nA > mC$

nicht $nA \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} mC$

so ist $pmC > \left\{\begin{matrix}npB\\pnB\end{matrix}\right.$ $\quad mC > nB$

nicht $mC \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} nB$.

4. Dieser indirecte Beweis von nr. 2. könnte zwar scheinen, die Simson'sche Behauptung in der Anmerkung zu Satz 10. umzustofsen: dafs sich nur erst mittelst des Satzes 10. beweisen lasse: Wenn $A:C>B:C$, und $nB>mC$; so sey auch $nA>mC$.

Im Grunde aber enthält er in der aus $A:C>B:C$ gezogenen Folgerung $npA>npB$, auch schon die $A>B$, also den 10ten Satz; und läuft somit mit dem Simson'schen Beweis auf eines hinaus.

Anmerkung zu Satz 9. 10.

Hat man, wie es vermittelst der Rechtfertigung von Def. 5. 7. geschehen kann, gezeigt: dafs zwei Verhältnisse nicht zugleich einerlei und verschieden, nicht zugleich eines gröfser als das andere, und das andere gröfser als das erste seyn können: so sind auch die abgekürzten Beweise der Sätze 9. 10. gültig.

Satz 4.

1. Wenn $A:B=C:D$; so ist auch $nA:mB=nC:mD$.

Es sind nämlich zugleich $p\times nA\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}q\times mB$, und $p\times nC\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}q\times mD$: weil $\begin{matrix}p\times nA\\p\times nC\end{matrix}$ Gleichvielfache von $\begin{matrix}A\\C\end{matrix}$; $\begin{matrix}q\times mB\\q\times mD\end{matrix}$ Gleichvielfache von $\begin{matrix}B\\D\end{matrix}$ (Satz 3.); und $A:B=C:D$ (Voraus.). Also (Def. 5.) —

2. Ebenso wird bewiesen: dafs,

wenn $A:B=C:D$, auch $nA:B=nC:D$

$A:mB=C:mD$ sey.

3. Simsons Zusatz zu Satz 4. Matthias p. 43. fg.

3. Satz 4. steht unschicklich zwischen Satz 1. 2. 3. und Satz 5. 6., welche Conversen sind von Satz 1. 2.; sich auch, wie jene auf Gleichvielfache überhaupt beziehen, und Vorbereitungssätze sind zu den die Proportionalgröfsen betreffenden.

4. Wenn $A:B>C:D$; so ist $nA:mB>nC:mD$. Den Beweis, ähnlich dem von Satz 4. s. Abhandlung II. §. 15. p. 44. fg. dieses Heftes.

Def. 14. und Satz 4., Zusatz. Simsons Satz B.

1. Wenn $A:B=C:D$; so ist auch $B:A=D:C$ *inverse* (Def. 14.).

Denn da $A:B=C:D$; so sind zugleich $nA \left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\} mB$ und $nC \left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\} mD$ für jede ganze Zahlen n, m (Def. 5.). Also auch zugleich $mB \left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\} nA$, und $mD \left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\} nC$; daher (Def. 5.). —

2. Dieser Satz ist unschicklich dem 4ten Satz als Zusatz angehängt, da er aus ihm nicht folgt; überhaupt keine Verbindung mit ihm hat. Nur sein Beweis wird ebenso unmittelbar aus Def. 5. abgeleitet, wie der von Satz 4.

Auch dieses ist aber ungeschickt in dem angegebenen Beweis dieses Zusatzes geschehen; indem geschlossen wird, aus $A:B=C:D$ folge $G:D=H:F$, $mB:nA=mD:nC$. S. Simsons Anmerkungen zu Satz 4. und zu seinem Satz B. Matth. p. 44. fg. 50.

3. Vermittelst dieses Satzes folgen die zweiten Theile von Satz 7. 9. ohne weiteren Beweis aus den ersten.

Satz F. (Abhdlg. II. §. 5. p. 40. dieses Heftes.)

Wenn $A:B>C:D$; so ist *inverse* $D:C>B:A$,
oder $B:A<D:C$.

Bew. Da $A:B>C:D$; so ist für gewisse ganze Zahlen n, m, $nA>mB$, $nC \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} mD$ (Def. 7.).

Ist nun 1stens $nC<mD$: so ist $mD>nC$, aber $mB<nA$
folglich $D:C>B:A$ (Def. 7.).

2tens. Ist aber $nC=mD$; so sey, da $nA>mB$, $nA=mB+E$.
Und nun ist entweder 1) $E \left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\} A$; also $mB+E \left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\} mB+A$
oder nA

Daher a) für $n=2$, ist $2C=mD$, $2A \left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\} mB+A$,

$A \left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\} mB$,

$nD=2C$, $mB \left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\} A$

$mB>nC$, $mB \left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\} nA$,

folglich (Def. 7.) $D:C>B:A$

b) für $n > 1$; ist $nA - A \left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\} mB$, d. i. $(n-1)A \left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\} mB$, $mB \left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\} (n-1)A$.

Aber da $mD = nC$ (Vorauss.); so ist $mD > nC - C$ d. i. $(n-1)C$.

Folglich (Def. 7.) $D : C > B : A$.

Oder 2) ist $E < A$. So sey $rE > A$ (Post. 5.)

Da $mB + E = nA$ (Vorauss.); so ist $rmB + rE = rnA$ (Satz A. 1.)

Aber wegen $rE > A$ ist $rmB + rE > rmB + A$: dah. $rnA > rmB + A$, $rnA - A$ d. i. (Satz 6.) $(rn-1)A > rmB$, oder $rmB < (rn-1)A$.

Wegen $mD = nC$ (Vorauss.) ist $rmD = rnC$ (Satz A.); folglich $rmD > rnC - C$ d. i. $(rn-1)C$.

Daher wieder $D : C > B : A$ (Def. 7.)

Oder kürzer für nr. 2. so: Man nehme, wenn $E \left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\} A$ ist, ein beliebiges Vielfaches von E; wenn aber $E < A$, ein solches Vielfaches von E, welches $> A$ sey; es sey in beiden Fällen das $r$fache: so ist $rE > A$. Und es wird wie vorhin geschlossen, dafs $rmB < (rn-1)A$ sey; aber $rmD > (rn-1)C$. Daher (Def. 7.) $D : C > B : A$.

Satz 11.

Wenn sowohl $A : B \left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\} C : D$ als $E : F \left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\} C : D$; so ist $A : B = E : F$. oder wenn $A : B = C : D$ und $C : D = E : F$

Denn wenn $A : B = C : D$; so ist für jede ganze Zahlen n, m zugleich $nA \left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\} mB$, und $nC \left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\} mD$. Aber unter der Voraussetzung $C : D = E : F$, ist auch $nE \left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\} mF$, so wie $nC \left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\} mD$; mithin so wie $nA \left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\} mB$. Folglich (Def. 5,) auch $A : B = E : F$.

Zusatz.

Wenn $A : B = C : D$; und $E : F = A : B$, $G : H = C : D$: so ist auch $E : F = G : H$.

Nämlich $E : F = C : D$ (Satz 11.) $= G : H$ (Satz 11.)

d. h, wenn zwei Verhältnisse unter einander einerlei sind; und ein drittes Verhältnifs ist mit dem ersten derselben, ein viertes mit dem zweiten einerlei: so sind auch das dritte und vierte unter einander einerlei.

Kürzer: Gleichen Verhältnissen gleiche sind auch einander gleich.

Satz 13.

1. Ist unschicklich durch Satz 12. von Satz 11. getrennt.

2. Wenn $A:B=C:D$, aber $C:D>E:F$; so ist auch $A:B>E:F$.

Denn wenn $C:D=E:F$; so ist für gewiſse $n, m, nC>mD$, aber $nE\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}mF$ (Def. 7.)

Da aber $A:B=C:D$; so ist $nA>mB$ so wie $nC>mD$ (Def. 5.)

Folglich $nA>mB$ aber $nE\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}mF$; d. h. $A:B>E:F$ (Def. 7.).

3. Fehlerhafte Darstellung des Anfangs des Beweiſes in dem griechischen Texte, und in einigen, namentlich auch der ersten Lorenzischen Uebersetzung. S. Simsons Anmerkg. zu Satz 13. (Matthias p. 59.).

Zusätze.

1. Wenn $A:B>C:D$, und $C:D=E:F$; so ist auch $A:B>E:F$ (Simsons Zus. Matth. a. a. O.)

Denn $nA>mB$ aber $nC\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}mD$ (Def. 7.); und $nE\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}mF$ so wie $nC\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}mD$ (Def. 5.)

2. Wenn $A:B=C:D$, aber $C:D<E:F$: so ist auch $A:B<E:F$.

Denn nun ist $E:F>C:D$, und $C:D=A:B$ also (Zus. 1.) $E:F>A:B$.

3. Wenn $A:B>C:D$, und $C:D>E:F$; so ist wieder $A:B>E:F$ (Abhdlg. II. §. 7. p. 41. fg. dies. Heftes.)

Denn wegen
$A:B>C:D$ ist für gewiſse Zahlen n, m, $nA>mB$ aber $nC\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}mD$

und wegen
$C:D>E:F$ ist für gewiſse Zahlen p, q, $pC>qD$ aber $pE\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}qF$

Aus $nC\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}mD$ oder $mD\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}nC$ folgt $pmD\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}pnC$ (Satz A. u. 1. Zus. 1.)

und aus $pC>qD$ folgt npC od. (S. 3. nr. 3.) $pnC>nqD$

daher $pmD>nqD$

und auch $pmB>nqB$ (Satz 2. Zus.)

Aber zu Folge $nA>mB$ ist $pnA>pmB$ (S. 1. Zus. 2.)

also pnA oder (Satz 3. nr. 3.) $npA>nqB$

Daher (Satz 3. u. 1. Zus. 2) $pA>qB$

indem $pE\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}qF$.

Satz 14.

1. Wenn vier „gleichartige" Gröſsen — —
2. Bew. Es sey $A:B=C:D$

und

1stens. $A=C$: so ist $A:B=C:B$ (Satz 7.)
$C:D=C:B$ (Satz 11.); $D=B$ (Satz 9.)

2tens. $A>C$: so ist $A:B>C:B$ (Satz 8.)
$C:D>C:B$ (Satz 13.); $D<B$ (Satz 10.)

3tens. $A<C$: so ist $C:B>A:B$ (Satz 8.)
$>C:D$ (Satz 13.); $B<D$ (Satz 10.).

Satz G, a. Simsons Satz A. Matth. p. 48.

Wenn irgend vier Gröſsen proportional sind; so ist die dritte $\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}$ vierte, so wie die erste $\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}$ zweite.

Denn so wie $A\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}B$, ist auch $nA\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}nB$. (Satz A. und Satz 1. Zus. 1.)

Wenn aber $A:B=C:D$; so sind zugleich $nA\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}nB$, und $nC\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}nD$ (Def. 5.). So wie $A\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}B$, und daher $nA\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}nB$; ist alsdenn auch $nC\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}nD$, und daher ebenfalls $C\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}D$ (Satz 1. Zus. 2. 3.).

Anmerkung.

Der zur Rechtfertigung der Definitionen 5. 7. dienenden Sätze B, D dritte Theile gelten nämlich auch für einerlei Vielfache von A und B, C und D, oder wenn man in denselben n statt m setzt; und daher gelten die Definitionen 5. 7. auch für einerlei Gleichvielfache des ersten und dritten, zweiten und vierten Glieds; nicht nur für verschiedene.

Und so ergibt sich denn auch: daſs

1stens. $A:B=C:D$, wenn $A=B$ und $C=D$;
2tens. $A:B>C:D$, a) wenn $A>B$ aber $C<D$,
oder b) wenn $A=B$ aber $C<D$.

Ferner umgekehrt: dafs

3tens. Wenn $A:B=C:D$: zugleich $A\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}B$, und

$C\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}D$ seyen;

4tens. Wenn $A:B>C:D$; $C<D$ seyn müfse, wenn

$A\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}B$ ist;

und $A>B$ seyn müfse, wenn

$C\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}D$ ist.

Bemerkung. In Beziehung auf nr. 1. und nr. 2. b. sind oben die Beisätze zu Satz B und D gemacht. nr. 3. ist hier in Satz G, a; nr. 4. wird im nächstfolgenden Satz G, b. dargethan. nr. 2. a. folgt aus Def. 7., weil für jedes m seyn wird $mA>mB$, $mC\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}mD$. —

Satz G, b. (Abhdlg. II. §. 11. p. 43. dieses Heftes.)

Wenn $A:B>C:D$, und 1) $A\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}B$; so ist $C<D$

2) $C\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}D$; so ist $A>B$.

Bew. 1stens. Wenn $B\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}A$; so ist $B:B\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}A:B$ (Satz 7. 8.)

Aber $A:B>C:D$ (Vorauss.)

folglich $B:B>C:D$ (Satz 13. u. dessen Zus. 3.)

Aber $D:D=B:B$ (S. B. Zus.)

folglich $D:D>C:D$ (Satz 13.)

also $D>C$ (Satz 10.)

2stens. Wenn $C=D$; so ist $C:D\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}D:D$ (Satz 7. 8.)

Da nun $A:B>C:D$ (Vorauss.)

so ist $A:B>D:D$ (Satz 13. Zus. 1. u. 3.)

Aber $D:D=B:B$ (Satz B. Zus.)

folglich $A:B>B:B$ (Satz 13.)

mithin $A>B$ (Satz 10.)

Anderer Beweis: Da $A:B>C:D$; so ist für gewifse m, n,

$mA>nB$, aber $mC\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}nD$.

Ist nun 1stens $A\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}B$; da jedoch $mA>nB$ ist, so ist $m>n$ (Satz 2. Zus. 8. u. 9.)

Da nun $m>n$, aber $nD\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}mC$ ist; so mufs $D>C$ seyn. (Satz 2. Zus. 10.)

Ist aber 2tens $D\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}C$; da jedoch $nD\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}mC$ ist; so ist $n\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}m$; nämlich

1) wenn $D=C$, und $nD=mC$; so ist $n=m$ (Satz 2. Zus. 8. nr. 1.)
2) wenn $D=C$, und $nD>mC$; so ist $n>m$ (Satz 2. Zus. 8. nr. 2.)
3) wenn $D<C$, und $nD\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}mC$; so ist $n>m$ (Satz 2. Zus. 9.)

Da demnach $n\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}m$, aber $mA>nB$: so ist,

1) wenn $n=m$; $nA=mA$ (Satz 2. Zus. 1.) $>nB$; folglich $A>B$ (Satz 1. Zus. 2. nr. 2.)
2) wenn $n>m$: da $mA>nB$; so ist $A>B$ (Satz 2. Zus. 10.).

So läfst sich der Satz ohne Vermittlung des Satzes B, Zus. aus der Def. 7. vermittelst der ersten Sätze von den Vielfachen ableiten.

Satz 6, c. (Abhdlg. II. §. 42. p. 57. dieses Heftes.)

Wenn A, B, C, D gleichartig sind; $A:B>C:D$ und 1) $A\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}C$; so ist $B<D$. 2) Wenn $B\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}D$: so ist $A>C$.

Bew. 1) Da $C\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}A$; so ist $C:B\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}A:B$ (Satz 7. 8.)
und da $A:B > C:D$ (Vorauss.);
so ist $C:B > C:D$ (Satz 13. u. Zus. 3.)
also $B < D$ (Satz 10.).

2) Da $B\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}D$; so ist $C:D\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}C:B$ (Satz 7. 8.);
und da $A:B > C:D$ (Vorauss.)
so ist $A:B > C:B$ (Satz 13. Zus. 1. 3.)
$A > C$ (Satz 10.).

Satz 12.

1. Wenn vier oder mehrere gleichartige Gröfsen proportionirt sind; so verhalten sich alle Vorderglieder zusammen zu allen Hintergliedern zusammen, wie ein Vorderglied zu seinem entsprechenden Hintergliede.

2. Erster und einfachster Fall:

Wenn $A:B=C:D$; so ist auch $A+C: B+D=\left\{\begin{matrix}A:B\\C:D\end{matrix}\right.$

Nämlich so wie $nA \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} mB$

daher auch $nC \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} mD$ (Def. 5.)

ist ebenfalls $nA+nC \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} mB+mD$ (Ax. 2. 4.)

d. h. $n(A+C) \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} m(B+D)$ Satz 1.).

Folglich (Def. 5.) — —

3. Fall für mehr als vier.

Wenn $A : B = C : D = E : F = G : H$ u. s. f.,

so ist auch $A+C+F+G+$ u. s. f. : $B+D+F+H$ u. s. w. $= \begin{cases} A : B \\ C : D \\ E : F \\ G : H \end{cases}$

Nämlich so wie $nA \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} mB$

daher auch $nC \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} mD$

und $nE \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} mF$ (Def. 5.)

und $nG \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} mH$

u. s. f.

ist ebenfalls $nA+nC+nE+nG+$ u. s. f. $\left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} mB+mD+mF+mH+$ u. s. f.

d. h. $n(A+C+E+G+$ u. s. f.$) \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} m(B+D+F+G+$ u. s. f.$)$ (Satz 1.)

Folglich (Def. 5.) — —

Satz 15.

1. Ist Folge von Satz 7. Zus. und von Satz 12.

Da $\overset{1}{C} : \overset{1}{F} = \overset{2}{C} : \overset{2}{F} = \overset{3}{C} : \overset{3}{F} = \overset{4}{C} : \overset{4}{F} = \ldots\ldots = \overset{n}{C} : \overset{n}{F}$ (Satz 7. Zus.)

so ist $\left. \begin{matrix} \overset{1}{C}+\overset{2}{C}+\overset{3}{C}+\overset{4}{C}+\ldots\ldots+\overset{n}{C} \\ nC \end{matrix} \right. : \left. \begin{matrix} \overset{1}{F}+\overset{2}{F}+\overset{3}{F}+\overset{4}{F}+\ldots+\overset{n}{F} \\ nF \end{matrix} \right\} = C : F$

d. h. (Satz 12.)

2. Anders ausgedrückt sagt auch der Satz: Gleichvielte Theile zweier Gröfsen verhalten sich wie die Gröfsen.

Nämlich wenn $nC=A$, $nF=B$: so ist $C=\frac{1}{n}A$, $F=\frac{1}{n}B$. Der Satz $C:F=nC:nF$, verwandelt sich also in den: $\frac{1}{n}A:\frac{1}{n}B=A:B$.

3. Daher verhalten sich auch Gleichvielfache gleichvielter Theile zweier Gröfsen wie diese Gröfsen. Nämlich $\frac{r}{n}A:\frac{r}{n}B=\frac{1}{n}A:\frac{1}{n}B$ (nr. 1.) $=A:B$ (nr. 2. u. Satz 11.).

Z u s a t z. Vgl. Satz 4.

Wenn $A:B=C:D$; so ist auch $nA:nB=mC:mD$.
Nämlich $nA:nB=A:B$ (Satz 15.) $=C:D$ (Vorauss. und Satz 11.) $=mC:mD$ (Satz 15. 11.)

S a t z 16. und D e f. 13.

1. Wenn vier „gleichartige" Gröfsen —
2. Bew. Wenn $A:B=C:D$,
so ist $nA:nB=mC:mD$ (Satz 15. Zus.)
daher zugleich $nA\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}mC$, und $nB\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}mD$ (Satz 14.)
folglich $A:C=B:D$ (Def. 5.)

S a t z H. (Abhdlg. II. §. 43. p. 57. fg. dieses Heftes.)

Wenn $A:B>C:D$; so ist auch $A:C>B:D$.
Bew. Wegen $A:B>C:D$ ist für gewifse Zahlen n, m,
$nA>mB$, aber $nC\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}mD$ (Def. 7.)
Daher $nA:nC>mB:nC$ (Satz 8. nr. 1.)
$mB:mC\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}mB:mD$ (Satz 7, nr. 2. Satz 8. nr. 2.)
folglich $nA:nC>mB:mD$ (Satz 13. Zus. 1. 3.)

Aber $A:C=nA:nC$ (Satz 15.)
Mithin $A:C>mB:mD$ (Satz 13.)
und $mB:mD=B:D$ (Satz 15.)
Also $A:C>B:D$ (Satz 13. Zus. 1.)

Satz 17. und Def. 16.

1. Allgemeinerer Ausdruck des Satzes:
Wenn $A+B:B=C+D:D$; so ist $A:B=C:D$.
Oder wenn $A:B=C:D$; und $A>B$, folglich auch $C>D$ (Satz G, Simsons Satz A.)
so ist ebenfalls $A-B:B=C-D:D$.

2. Bew. des Textes: Dafs $AE:EB=CF:FD$, wenn $AB:BE=CD:DF$.

a) Constr. $\left.\begin{matrix}GH\\HK\\LM\\MN\end{matrix}\right\}$ irgend Gleichvielfache von $\left\{\begin{matrix}AE\\EB\\CF\\FD\end{matrix}\right.$ $\left.\begin{matrix}KO\\NP\end{matrix}\right\}$ irgend Gleichvielfache von $\left\{\begin{matrix}EB\\FD\end{matrix}\right.$ Da auch $\left.\begin{matrix}HK\\MN\end{matrix}\right\}$ Gleichvielfache von $\left\{\begin{matrix}EB\\FD\end{matrix}\right.$

so sind auch (Satz 1.) $\left.\begin{matrix}GK\\LN\end{matrix}\right\}$ die nämlichen Gleichvielfache von $\left\{\begin{matrix}AB\\CD\end{matrix}\right.$ so sind (Satz 2.) $\left.\begin{matrix}HO\\MP\end{matrix}\right\}$ wieder Gleichvielfache von $\left\{\begin{matrix}EB\\FD.\end{matrix}\right.$

Vermöge der Bedingung $AB:BE=CD:DF$
sind zugleich $GK\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}HO$, $LN\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}MP$ (Def. 5.)
Und zum Beweis, dafs $AE:EB=CF:FD$;
ist (Def. 5.) zu zeigen, dafs zugleich $GH\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}HO$,
$LM\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}NP$ sey.

Dieſs wird nun so gefolgert:
So wie $GH\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}KO$;
ist auch, HK beiderseits addirt, $GK\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}HO$ (Ax. 2. 4.)
mithin (Vorauss. und Def. 5.) $LN\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}MP$
und MP beiderseits abgezogen, $LM\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}NP$ (Ax. 3. 5.)

b) Oder: so wie $nAE \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} mEB$:

ist auch $nAE+nEB \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} nEB+mEB$ (Ax. 2. 4.)

d. i. $nAB \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} (n+m)EB$ (V, 1. 2.)

mithin $n.CD \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} (n+m)DF$ (Def. 5. u. Vorauss.)

d. h. $n.CF+n.FD \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} n.DF+m.DF$ (V, 1. 2.)

folglich $n.CF \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} m.DF$ (Ax. 3. 5.)

somit $AE : EB = CF : FD$ (Def. 5.).

3. Darstellung des Beweises von nr. 1.

So wie $n(A-B) \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} mB$;
d. h. (Satz 5.) $nA-nB \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\}$

ist $nA \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} \begin{matrix} mB+nB \text{ (Ax. 2. 4.)} \\ (m+n)B \text{ (Satz 2. nr. 2.)} \end{matrix}$

Daher auch $nC \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} \begin{matrix} (m+n)D \text{ (Def. 5., weil } A:B=C:D \text{ (Vorauss.)} \\ mD+nD \text{ (Satz 2.)} \end{matrix}$

und Ax. 3. 5. $nC-nD \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} mD$; folgl. (Def. 5.)
d. h. (Satz 5.) $n(C-D) \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\}$ $A-B : B=C-D : D.$

Z u s ä t z e.

1. Wenn $A:B=C:D$; aber $A<B$, daher auch (Satz G.) $C<D$:
so ist $B : A=D:C$ (Satz 4. Zus.), wobei $B>A$, $D>C$.
folglich $B-A : A=D-C : C$ (Satz 17.).

2. Allgemein: Wenn vier, zwei und zwei ungleiche, Gröfsen proportionirt sind; so verhält sich auch der Unterschied der Glieder des ersten Verhältnisses zu dem kleinern Gliede desselben, wie der Unterschied der

Glieder des zweiten Verhältnisses zu dem kleineren Gliede dieses Verhältnisses.

3. Daher auch *inverse* (Satz 4. Zus.) das kleinere Glied des ersten Verhältnisses zu dem Unterschied der Glieder dieses Verhältnisses, wie das kleinere Glied des zweiten Verhältnisses zu dem Unterschied der Glieder desselben.

Satz 18. und Def. 15.

1. Allgemein: Wenn $A-B:B=C-D:D$; so ist $A:B=C:D$; oder wenn $A:B=C:D$; so ist auch $A+B:B=C+D:D$.

2. Mangelhaftigkeit und Unächtheit des Beweises des griechischen Textes. S. Simsons Anmerkung zu Satz 18. Matth. p. 63.

3. Darstellung desselben:

Wenn $AE:EB=CF:FD$; und nicht $AB:BE=CD:DF$: so sey $AB:BE=CD:DG$, wo $DG \left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\} DF$, mithin $CG \left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\} CF$.

Alsdann wäre $AE:EB=CG:GD$ (Satz 17.)
folglich da $AE:EB=CF:FD$ (Vorauss.)
wäre $CG:GD=CF:FD$ (Satz 11.)
und $CG \left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\} CF$, so wie $GD \left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\} DF$ (Satz 14.)

welches unmöglich, da $CG \left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\} CF$, so wie $GD \left\{\begin{matrix}<\\>\end{matrix}\right\} DF$ ist.

4. Simsons Beweis angewendet auf die Figur des 17ten Satzes der Lorenzischen Uebersetzung.

Construct. Es seyen $\left.\begin{matrix}GK\\KH\\LN\\NM\end{matrix}\right\}$ irgend Gleichviel-fache von $\left\{\begin{matrix}AB\\BE\\CD\\DF;\end{matrix}\right.$

so sind $\left.\begin{matrix}GH\\LM\end{matrix}\right\}$ die nämlichen Vielfache von $\left\{\begin{matrix}AE\\CF.\end{matrix}\right.$

Ferner seyen $\left.\begin{matrix}HO\\MP\end{matrix}\right\}$ irgend Gleichviel-fache von $\left\{\begin{matrix}EB\\FD.\end{matrix}\right.$

Der Beweis von $AB:BE=CD:DF$ erfordert also, dafs zugleich $GK \left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\} HO$ und $LN \left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\} MP$ sey.

Ist nun 1stens $HO > HK$, d. h. ist HO ein mehr Vielfaches von EB, als HK (Satz 2. Zus. 4.)
also auch $MP > MN$ (Satz 2. Zus. 2.) weil MP wieder mehr Vielfaches von FB, als PN (Constr.)

so ist entweder $KO = EB$
und $NP = FD$,
oder $\left.\begin{matrix} KO \\ NP \end{matrix}\right\}$ sind Gleichvielfache von $\left\{\begin{matrix} EB \\ FD \end{matrix}\right.$ (Satz 6.)

In beiden Fällen ist, weil $AE : EB = CF : FD$
ebenfalls (Satz 4. nr. 1, 2.) $GH : KO = LM : NP$

So wie $GK \left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} HO$

daher auch $GH \left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} KO$ (Ax. 3. 5.); so ist mithin ebenfalls

$LM \left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} NP$ (Bew. und Satz 6.)

folglich auch $LN \left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} MP$ (Ax. 2. 4.)

Ist aber 2tens $HO \left\{\begin{matrix} = \\ < \end{matrix}\right\} HK$ genommen; d. h. ist $HO \left\{\begin{matrix} \text{ebenso} \\ \text{weniger} \end{matrix}\right\}$ Vielfach von EB, als HK (Satz 2. Zus. 3. 4.)

daher auch $MP \left\{\begin{matrix} = \\ < \end{matrix}\right\} MN$ (Constr. und Satz 2. Zus. 1. 2.):

so sind, da (Voraus.) $\begin{matrix} AB \\ CD \end{matrix} \left\{\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}\right\} \begin{matrix} BE \\ DF \end{matrix}$, immer zugleich $\begin{matrix} GK \\ LN \end{matrix} \left\{\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}\right\} \begin{matrix} HO \\ MP \end{matrix}$ (Satz 1. Zus. 1).

5. Andere Darstellung des Beweises nr. 4:

Dafs $A+B : B = C+D : D$, wenn $A : B = C : D$.

1stens. Für $n \left\{\begin{matrix} < \\ = \end{matrix}\right\} m$ ist,

da $\begin{cases} A+B > B, \\ C+D > D, \end{cases}$ sowohl $n(A+B) > mB$ als $n(C+D) > mD$ (Satz 1. Zus. 1. u. Satz 2. Zus. 2.).

2tens. Für $n < m$, daher $\begin{matrix} nB < mB \\ nD < mD \end{matrix}$ (Satz. 2 Zus. 2.)

ist, so wie $n(A+B)$ $\left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\}$ mB
d. h. (Satz 1) $nA+nB$

folglich $nA \left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} \begin{cases} mB-nB \text{ (Ax. 3. 5.)} \\ B, \text{ wenn } m = n+1 \\ (m-n)B, \text{ wenn } m > n+1 \end{cases}$ (Satz 6. nr. 5.).

ebenfalls $nC \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} \begin{cases} (m-n)D \text{ (Satz G.)} \\ mD - nD \text{ (Satz 5.)} \end{cases}$

weil $nA : \begin{Bmatrix} B \\ (m-n)B \end{Bmatrix} = nC : \begin{Bmatrix} D \\ (m-n)D \end{Bmatrix}$ (Satz 4. Zus. 1. 2.)

daher $nC+nD \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} mD$ (Ax. 2. 4)
d. h. (Satz 1.) $n(C+D) \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} mD$

Zusätze.

1. Ebenso wird unmittelbar bewiesen, oder mittelst Satz 4. Zus. aus Satz 18. hergeleitet: daſs, wenn $A:B=C:D$, auch $A+B:A=C+D:C$ sey.

2. Daher allgemein: Wenn vier Gröſsen proportional sind; so verhält sich auch die Summe der Glieder des ersten Verhältnisses zu dem einen Gliede desselben, wie die Summe der Glieder des zweiten Verhältnisses zu dem homologen Gliede des zweiten.

3. Und so ebenfalls *inverse*, ein Glied des ersten Verhältnisses zu der Summe der zwei Glieder desselben, wie das homologe Glied des zweiten Verhältnisses zu der Summe der Glieder des zweiten.

4. Defin. 17. und Zusatz zu Satz 19. Simsons Satz E, Matth. p. 66. fg.
Wenn $A:B=C:D$; und $A>B$, daher auch (Satz G.) $C>D$; so ist $A:A-B=C:C-D$ *convertendo*.

Bew. $A-B : B=C-D : D$ (*divisim*, Satz 17.) weil $A:B=C:D$, u. $A>B, C>D$.
$B : A-B=D : C-D$ (*inverse*, Satz 4. Zus.)
$A : A-B=C : C-D$ (*componendo*, Satz 18.)

5. Oder in Beziehung auf Lorenz. Fig. zu Satz 19.
Wenn $AB : BE = CD : DF$;
so ist $AE : EB = CF : FD$ (Satz 17.)
$BE : EA = DF : FC$ (Satz 4. Zus.)
$BA : AE = DC : CF$ (Satz 18.)

Das ist: Wenn ein aus zwei Theilen bestehendes Ganzes sich zu dem einen seiner Theile verhält, wie irgend ein anderes auch aus zwei Theilen bestehendes Ganzes zu dem einen seiner Theile; so verhält sich auch das erste Ganze zu seinem andern Theile wie das zweite Ganze zu seinem andern Theile.

6. Verworrenheit und Unstatthaftigkeit des Beweises des Griech. Textes. (Simsons Anmerk. zu seinem Satz *E.* Matth. p. 67.)

In Satz 19 und zu Anfang des Zusatzes war Bedingung: $AB : CD = AE : CF$
oder *alterne* $BA : AE = DC : CF$
und Consequenz: $AB : CD = EB : FD$
oder *alterne* $AB : BE = CD : DF$.

Dies wird nun in dem Zusatz erstlich als Folge angegeben; hernach als Bedingung angenommen; und die erste Bedingung $BA : AE = DC : CF$ als Consequenz gesetzt.

7. Einen unmittelbaren, dem von Satz 17. ähnlichen Beweis des Satzes nr. 4. s.m. in der Abhdlg. I. §. 34.

8. Wenn $A:B = C:D$; aber $A<B$, daher auch (Satz G.) $C<D$:
so ist $B:A = D:C$ (Satz 4. Zus.)
und $B:B-A = D:D-C$ (Zus. 4.)

9. Allgemein also: Wenn vier, zwei und zwei ungleiche, Gröfsen proportional sind; so verhält sich auch das gröfsere Glied des ersten Verhältnisses zu dem Unterschiede der Glieder desselben, wie das gröfsere Glied des zweiten Verhältnisses zu dem Unterschiede seiner Glieder.

10. Und *inverse* (Satz 4. Zus.) der Unterschied der Glieder des ersten Verhältnisses verhält sich zu dem gröfsern Gliede desselben, wie der Unterschied der Glieder des zweiten Verhältnisses zu dem gröfsern Gliede des zweiten.

11. Allgemeiner: Wenn vier, zwei und zwei ungleiche, Gröfsen proportional sind; so verhält sich ein Glied des ersten Verhältnisses zu dem Unterschiede der Glieder desselbsn, wie das homologe Glied des zweiten Verhältnisses zu dem Unterschiede seiner Glieder; und umgekehrt, der Unterschied der Glieder des ersten Verhältnisses zu einem Gliede desselben, wie der Unterschied der Glieder des zweiten Verhältnisses zu dem homologen Gliede des zweiten (Satz 17. Zus. 1. 3. Satz 18. Zus. 9. 10.).

12. Und die ähnliche Folgerung hat Statt in Ansehung der Summen der Glieder der Verhältnisse (Satz 18. Zus. 3.). Daher

wenn $A : B = C : D$;
so ist $A \pm B : \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = C \pm D : \begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix}$; $A \pm B = \begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix} : C \pm D$.

Satz I.

Wenn $A:B > C:D$; so ist auch $A+B:B > C+D:D$ (Abhdg. II. §. 19. §. 21.)
aber $A+B:A < C+D:C$

Bew. 1stens.

Wenn $A:B > C:D$; so ist $nA > mB$, aber $nC \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} mD$

mithin (Ax. 2. 4.) $nA+nB > mB+nB$, $nC+nD \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} mD+nD$

d. h. (Satz 1. 2) $n(A+B) > (m+n)B$, $n(C+D) \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} (m+n)D$

folglich (Def. 7.)—

2tens.

Wenn $A:B > C:D$; so ist $D:C > B:A$ (Satz F);
$D+C:C > B+A:A$ (nr. 1.)
oder $A+B:A < C+D:C$

Zusätze.

1. Wenn daher die vier Gröfsen gleichartig sind; so hat die Summe der ersten und zweiten zu der Summe der dritten und vierten ein gröfseres Verhältnifs als die zweite zur vierten; aber ein kleineres als die erste zur dritten. (Abhdlg. II. §. 44.).

Nämlich wenn $A:B > C:D$,
so sind (Satz I.) $A+B:B > C+D:D$, aber $A+B:A < C+D:C$.
daher (Satz H.) $A+B:C+D > B:D$ $A+B:C+D < A:C$.

2. Wird zu jeder von zwei ungleichen Gröfsen die nämliche dritte addirt; so hat die gröfsere zu der kleineren ein gröfseres Verhältnifs als die Summe der ersten und dritten zur Summe der zweiten und dritten. (Abhdlg. II. §. 46.).

Denn wenn $A > B$; so ist $A:C > B:C$ (Satz. 8.).
daher $A+C:B+C < A:B$ (Zus. 1.).
oder $A:B > A+C:B+C$.

Satz K.

Wenn $A:B > C:D$; und $C > D$: so ist auch $A > B$ (Satz G, b.)
und nun $A-B:B > C-D:D$, aber $A:A-B < C:C-D$ (Abhldg. II. §. 22. 24.).

Bew. 1stens. Da (Vorauss.)
$A:B > C:D$; so ist $nA > mB$; aber $nC \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} mD$.

Da ferner (Vorauss.)
$C > D$ oder $D < C$; so ist $mD < mC$ (Satz 1. Zus. 1.)

also $nC \lesseqgtr mC$
$n \lesseqgtr m$ (Satz 2. Zus. 4.)
$nD < mD$ und $nB \lesseqgtr mB$ (Sat. 2. Zus. 2.)

Wegen
$A > B$, wenn $C > D$ (Satz G, b), ist auch $nA > nB$ (Satz 1. Zus. 1.)

Daher, indem $nA > mB$, aber $nC \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} MD$,

sind $nA-nB \left\{ \begin{matrix} \\ n(A-B) \end{matrix} \right\} > mB-nB$; $n\,C-nD \left\{ \begin{matrix} = \\ n(C-D) \end{matrix} \right\} mD-nD$
d. h. (Satz 5.)

Folglich 1) für $m > n+1$ sind (Satz 6.) $n(A-B) > (n-m)B$,
aber $n(C-D) \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} (n-m)D$;

2) für $m = n+1$ sind $n(A-B) > B$, $n(C-D) \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} D$,

$2n(A-B) > 2B$, $2n(C-D) \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right\} 2D$;

mithin (Defin. 7.) $A-B : B > C-D : D$.

2tens. Wenn $A:B > C:D$, und $C > D$; folglich auch $A > B$ (Satz G. b.).

so ist $A-B : B > C-D : D$ (nr. 1.)
$D : C-D > B : A-B$ (Satz F.)
$C : C-D > A : A-B$ (Satz I.)

Zusätze.

1. Wenn von vier Gröfsen, deren erste zur zweiten ein gröfseres Verhältnifs hat als die dritte zur vierten, die dritte gröfser ist als die vierte, mithin auch (Satz G, b.) die erste gröfser ist als die zweite: so hat auch der Unterschied der zwei ersten zu jeder derselben ein gröfseres Verhältnifs, als der Unterschied der andern zwei zu der homologen derselben. (Abhdg. II. §. 26.).

Nämlich wenn $A:B > C:D$, und $C > D$ mithin auch (Satz G, b.) $A > B$:
so ist 1) $A-B : B > C-D : D$ (Satz K.)
2) $C : C-D > A : A-B$ (Satz K. nr. 2.)
mithin $A-B : A > C-D : C$ (Satz F.).

2. Umgekehrt hat alsdann die eine der zwei ersten Gröfsen zu ihrem Unterschiede ein kleineres Verhältnifs, als die homologe der zwei andern zu dem Unterschiede derselben. (Satz F).

3. Wenn hingegen die zweite gröfser ist als die erste, so ist auch die vierte gröfser als die dritte; und nun hat der Unterschied der zwei ersten zu jeder derselben ein kleineres Verhältnifs als der Unterschied der zwei andern zu der homologen derselben, (Abhdlg. II. §. 28).

Denn wenn $A:B > C:D$; so ist $D:C > B:A$ (Satz F.) Daher wenn $B > A$: so ist
1) $D > C$ (Satz G, b.)
2) $D-C : \left\{ \begin{matrix} C \\ D \end{matrix} \right\} > B-A : \left\{ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\}$ (Satz K Zus. 1.).

d. h. $B-A : \left\{ \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\} < D-C : \left\{ \begin{matrix} C \\ D \end{matrix} \right\}$

4. Umgekehrt hat alsdann die eine der zwei ersten Gröfsen zu ihrem Unterschiede ein gröfseres Verhältnifs als die homologe der zwei andern zu dem Unterschiede derselben (Satz *F.*).

5. Sind die vier Gröfsen A, B, C, D gleichartig; und $A:B > C:D$; und es ist

1) $C > D$, folgl. auch $A > B$: so ist auch $A-B : C-D > \begin{cases} B:D \\ A:C \end{cases}$
(Zus. 1. u. Satz H.)

2) $B > A$, — — $D > C$: — — $B-A : D-C < \begin{cases} B:D \\ A:C \end{cases}$
(Abhdlg. II. §. 47.) (Zus. 3. u. Satz H.)

6. Wenn $A > B$; so ist $A:C > B:C$ (Satz 8.)

Ist num 1tens.
$B > C$, daher auch $A > C$: so ist $A-C : B-C > \begin{matrix} A:B \\ A:B \end{matrix}$ (Zus. 5.); $< A-C : B-C$.

Ist aber 2tens
$C > A$, — — $C > B$: so ist $C-A : C-B < A:B$ (Zus. 2.); $> C-A : C-B$,
(Abhdlg. II. §. 47.)

Satz 19.

1. Wenn ein Ganzes zu einem mit ihm gleichartigen Ganzen sich verhält wie ein Theil des ersten zu einem Theile des zweiten: so verhalten sich die nach Wegnahme dieser Theile übrig bleibenden Reste sowohl wie die Ganzen, als wie die hinweggenommenen Theile. (S. Simsons Anmerkung zu Satz 19.).

2. Nämlich wenn $AB : CD = AE : CF$
so sind auch $BA : AE = DC : CF$ (Satz 16.)
$BE : EA = DF : FC$ (Satz 17.)
$BE : DF = EA : FC$ (Satz 16.)
$= AB : CD$ (Voraus. u. Satz 11.).

3. Allgemein: wenn vier homogene Gröfsen proportional sind; und die erste gröfser als die dritte, daher auch (Satz 14.) die zweite gröfser als die vierte ist; so verhält sich auch der Ueberschufs der ersten über die dritte zum Ueberschufs der zweiten über die vierte, wie die erste zur zweiten, oder wie die dritte zur vierten.

Nämlich wenn $A : B = C : D$, und $A > C$, daher $B > D$ (Satz 14.):

so sind auch $A : C = B : D$ (Satz 16.)
$A - C : C = B - D : D$ (Satz 17.)
$A - C : B - D = C : D$ (Satz 16.)
$= A : B$ (Vorauss. u. Satz 11.)

4. Zu Folge Satz 12. nr. 2 ist alsdann auch
$A + C : B + D = A : B = C : D$.

5. Daher auch (Satz 11.) $A + C : B + D = A - C : B - D$.

Satz L.

Wenn von vier homogenen Gröfsen die erste zur zweiten ein gröfseres Verhältnifs hat als die dritte zur vierten; so hat die Summe der ersten und dritten zur Summe der zweiten und vierten noch ein gröfseres Verhältnifs als die dritte zur vierten; aber ein kleineres als die erste zur zweiten. (Abhdlg. II. §. 45.).

Nämlich wenn
$A : B > C : D$,
also auch $A : C > B : D$ (Satz H.):
so sind (Satz I.) $A + C : C > B + D : D$; aber $A + C : A < B + D : B$
folgl. (Satz H.) $A + C : B + D > C : D$ $A + C : B + D < A : B$

Satz M.

Wenn von vier gleichartigen Gröfsen die erste zur zweiten ein gröfseres Verhältnifs hat als die dritte zur vierten; und die zweite gröfser ist als die vierte: so ist auch die erste gröfser als die dritte; und der Ueberschufs der ersten über die dritte hat zum Ueberschufs der zweiten über die vierte ein gröfseres Verhältnifs als die erste zur zweiten, mithin (Satz 13. Zus. 3.) auch ein gröfseres als die dritte zur vierten (Abhdlg. II. §. 48).

Nämlich wenn $A : B > C : D$; und $B > D$:

so ist 1) $A : D > A : B$ (Satz 8. nr. 2.)
$> C : D$ (Vorauss. u. Satz 13. Zus. 3.);
daher $A > C$ (Satz 10. nr. 1.)

2) ist $A : C > B : D$ (Satz H.)
$A - C : A > B - D : B$ (Satz H. Zus. 1.)
$A - C : B - D > A : B$ (Satz H.)
$> C : D$ (Vorauss. u. Satz 13. Zus. 3.).

Zusatz.

Hingegen ist die vierte gröfser als die zweite, wenn die dritte gröfser ist als die erste; und nun hat

der Ueberschufs der dritten über die erste zum Ueberschufs der vierten über die zweite ein kleineres Verhältnifs als die dritte zur vierten, folglich auch als die erste zur zweiten. (Abhdlg. II. §. 48.).

Denn, wenn $A:B > C:D$; so ist $D:C > B:A$ (Satz F.). Daher, wenn $C > A$; so ist 1) $D > B$ (Satz M. nr. 1.)

2) $D-B:C-A > \begin{cases} D:C \\ B:A \end{cases}$ (Satz M. nr. 2.)

folglich $C-A:D-B < \begin{cases} C:D \\ A:B \end{cases}$ (Satz F).

Defin. 18. 19. 20. Sätze 20—23.

1. In dem griechischen Texte sind Defin. 20. und die Sätze 20. 21. 23. auf drei und drei Gröfsen eingeschränkt. Defin. 18. sagt überhaupt: πλειονων οντων μεγεθων. Satz 22. sagt bestimmter: Εαν ᾖ ὁποσαουν μεγεθη. Def. 19. erwähnt keiner Zahl der Gröfsen.

2. Defin. 19. 20. des griech. Textes, besonders die leztere, sind undeutlich; sowie auch die Lorenzische Uebersezung der 20ten. Genauer sind die Simsonischen. Matth. p. 42.

3. Der Ausdruck τεταγμενη αναλογια kommt in den Sätzen 20. 22. nicht vor; nur der ἐκταραγμενη in den Sätzen 21. 23.: in jenen aber steht schlechtweg δι ἰσου. Auch in dieser Rücksicht scheint daher Simson die Defin. 18. 19. 20. richtig zu bestimmen, zu erklären, und einander unterzuordnen.

4. Τεταγμενη, *ordinatim*, möchte heifsen: beiderseits der Reihe oder der Ordnung nach; ταραγμενη, *perturbate*, in gestörter Ordnung, einerseits von vornen, andererseits von hinten, aber so dafs auch hier das Vorderglied immer vorangehendes Glied in der Reihe sey.

5. Δι ἰσου, *ex aequo*, möchte wenigstens in Def. 18 und Satz 20. 21. heifsen: gleichmäfsig; besser als: aus dem Gleichen, in der Uebersezung von Matthias p. 42. In Satz 22. 23. ist die Abkürzung aus Def. 18. und Satz 20. 21. zu ergänzen.

6. Die Sätze 20. 21. sind Hülfssätze zu den Beweisen von 22. 23., brauchen hiezu nur von drei und drei Gröfsen erwiesen zu seyn; sind daher auch von Simson, wie im griech. Text, auf diese Zahl eingeschränkt; werden unnöthig in der zweiten Lorenzischen Ausgabe auf mehrere unbestimmt ausgedehnt, ohne aber den Beweis dafür zu führen; welches auch nicht ohne den

Gebrauch der einfachen Fälle von Satz 22. 23. geschehen kann.

Satz 20.

1. Wenn
$A = C$: so ist $A : B = C : B$ (Satz 7.)
$D : E = F : E$ (Satz 11.), weil $D : E = A : B$ (Vorauss.)
$F : E = C : B$ (Vorauss.
$D = F$ (Satz 9.) u. Satz 4. Zus.)

2. Wenn
$A > C$: so ist $A : B > C : B$ (Satz 8.)
$D : E > C : B$ (Satz 13.), weil $D : E = A : B$ (Vorauss.)
$> F : E$ (S. 13. Z. 1.), weil $C : B = F : E$ (Vorauss.
$D > F$ (Satz 10.). u. Satz 4. Zus.)

3. Wenn
$\left\{\begin{matrix} A < C \\ C > A \end{matrix}\right\}$: so ist $C : B > A : B$ (Satz 8.)
$F : E > A : B$ (Satz 13.), weil $F : E = C : B$ (Vorauss.
$> D : E$ (S. 13. Z. 1.) u. Satz 4. Zus.)
$F > D$ (Satz 10.) oder $D < F$.

Satz 21.

1. Wenn
$A = C$: so ist $A : B = C : B$ (Satz 7.)
$E : F = E : D$ (S. 11. Zus.), weil $E : F = A : B$ (Vorauss.)
$E : D = C : B$ (Vorauss.
$F = D$ (Satz 9.). u. Satz 4. Zus.)

2. Wenn
$A > C$: so ist $A : B > C : B$ (Satz 8.)
$E : F > C : B$ (Satz 13.), weil $E : F = A : B$ (Vorauss.)
$C : B = E : D$ (Vorauss.
$D > F$ (Satz 10.). u. Satz 4. Zus.)

3. Wenn
$\left\{\begin{matrix} A < C \\ C > A \end{matrix}\right\}$: so ist $C : B > A : B$ (Satz 8.)
$E : D > A : B$ (Satz 13.), weil $E : D = C : B$ (Vorauss.
u. Satz 4. Zus.)
$> E : F$ (S. 13. Zus. 1.) weil $A : B = E : F$ (Vorauss.)
$D < F$ (Satz 10.).

Satz 22.

1. Wenn
$A : B = D : E$;
$B : C = E : F$ (Vorauss.)
also $nA : mB = nD : mE$
$mB : rC = mE : rF$ (Satz 4.).

d. h. nA, mB, rC *ordinatim*, geordnet
nD, mE, rF proportional:

so sind zugleich

$$nA \left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} rC, \text{ und } nD \left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} rF \text{ (Satz 20.)}$$

daher $A : C = D : F$ (Def. 5.)

2. Wenn
$A, B, C, D,$ und E, F, G, H *ordinatim* proportional:
so ist $A : C = E : G$ (nr. 1.)
und $C : D = G : H$ (Vorauss.),
daher wieder $A : D = E : H$ (nr. 1.)
u. s. w. S. Simsons Anmerkg. zu Satz 22.

Zusätze.

1. Wenn
$A : B = C : D$; und $A > B$, daher auch $C > D$ (Satz G.):
so sind $A + B : B = C + D : D$ (Satz 18.)
$B : A - B = D : C - D$ (Satz 17. u. S. 4. Zus.),
folglich $A + B : A - B = C + D : C - D$ (Satz 22.).

Ebenso wenn $A < B$, mithin $C < D$ (Satz G.);
folgt aus $B + A : B = D + C : D$ (Satz 18.)
und $B : B - A = D : D - C$ (Satz 17. Zus. 1.),
$B + A : B - A = D + C : D - C$ (Satz 22.).

Wenn daher vier, zwei und zwei ungleiche, Grösen proportional sind; so verhält sich auch die Summe der Glieder des ersten Verhältnisses zu ihrem Unterschiede, wie die Summe der Glieder des zweiten Verhältnisses zu dem Unterschiede derselben.

2. Sind die vier Grösen gleichartig; so verhält sich auch (Satz 16.) die Summe der Glieder des ersten Verhältnisses zur Summe der Glieder des zweiten, wie der Unterschied der Glieder des ersten zum Unterschied der Glieder des zweiten.

Vgl. Satz 19. Zus. 5.

Satz 23.

1. Weil
$A : B = E : F$; also $nA : nB = mE : mF$ (Satz 15. Zus.)
$B : C = D : E$ (Vorauss.) $nB : mC = nD : mE$ (Satz 4.).
d. h. nA, nB, mC } zerstreut (*perturbate*)
nD, mE, mF } proportional;
so sind zugleich
$$nA \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} mC, \text{ und } nD \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} mF \text{ (Satz 21.)}$$
daher $A : C = D : F$ (Def. 15.)

2. Wenn
$A, B, C, D,$ und E, F, G, H (zerstreut *perturbate*) proportional sind:
so ist $A : C = F : H$ (nr. 1.), weil nämlich $A : B = G : H$
und $C : D = E : F$ (Vorauss.) $B : C = F : G$ (Vorauss.)
also $A : D = E : H$ (nr. 1.)
u. s. w. Siehe Simsons Anmerkg. zu Satz 23.

Die beiden Sätze 22. 23. gelten also auch von mehr als drei und drei Grösen.

Satz N. (Abhdlg. II. §. 31.).

Wenn $A:B=D:E$, $B:C>E:F$; oder $A:B>D:E$, $B:C=E:F$; oder $A:B>D:E$, $B:C>E:F$;

so ist $A:C>D:F$.

1. Es seyen $A:B=D:E$, $B:C>E:F$; also für gewisse n, m,

$nB>mC$, aber $nE\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}mF$.

So ist $A:mC>A:nB$ (Satz 8.), weil $mC<nB$

aber $A:nB=D:nE$ (Satz 4. nr. 2.), weil $A:B=D:E$ (Vorauss.)

Also $A:mC>D:nE$ (Satz 13 Zus. 1.)

und $D:nE\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}D:mF$ (Satz 7. oder 8.), weil $nE\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}mF$

folglich $A:mC>D:mF$ (Satz 13. Zus. 1. oder 3.)

d. h. $pA>q(mC)$, aber $pD\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}q(mF)$ für gewisse ganze Zahlen p, q (Def. 7.).

Mithin $pA>(q\times m)C$, $pD\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}(q\times m)F$ (Satz 3.)

daher $A:C>D:F$ (Def. 7.)

2. Wenn

$A:B>D:E$, $B:C=E:F$; so sind $C:B=F:E$ (Satz 4. Zus.), $B:A<E:D$ (Satz F.)

daher $C:A<F:D$ (nr. 1.) [Nämlich nach nr. 1, folgt aus

$A:B=D:E$ und $B:C>E:F$; mithin aus $D:E=A:B$, $E:F<B:C$ / $D:F<A:C$]

$A:C>D:F$

Daher $A:C>D:F$ (Satz F.).

Oder auch eben so wie nr. 1.

$nA>mB$, $nD\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}mE$ wegen $A:B>D:E$

also $nA:C>mB:C$ (Satz 8.)

aber $mB:C=mE:F$ (Satz 4.) wegen $A:C=E:F$.

Mithin $nA:C>mE:F$, (Satz 13.)

aber $mE:F\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}nD:F$ (Satz 7. 8.) wegen $mE\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}nD$.

daher $nA:C>nD:F$ (Satz 13. Zus. 1. und 3.)

woraus auf ähnliche Art, wie in nr. 1. gefolgert wird $A:C>D:F$.

3. Es seyen

$A:B>D:E$, $B:C>E:F$; also für gewisse n, m; $nA>mB$, $nD\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}mE$ (Def. 7.) p, q; $pB>qC$, $pE\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}qF$;

so sind hingegen

$pnA>pmB$ (Satz I. Zus. 1.), $pnD\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}pmE$ (Satz A. oder Satz 1. Zus. 1.)

$mpB>mqC$, $mpE\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}mqF$

daher weil $pmB=mpB$ (Satz 3. nr. 3. Satz 2. Zus. 1.) weil $pmE=mpE$

$pnA>mqC$, $pnD\left\{\begin{matrix}=\\<\end{matrix}\right\}mqF$

mithin $A:C>D:F$ (Def. 7.).

Satz 0. (Abhdlg. II. §. 32.).

Wenn $A:B=E:F$; oder $A:B>E:F$; oder $A:B<E:F$;
$B:C>D:E$ $B:C=D:E$ $B:C<D:E$

so ist $A:C>D:F$.

1. Es seyen $A:B=E:F$
$B:C>D:E$; also für gewisse n, m,

$$nB>mC, \text{ aber } nD\begin{Bmatrix}=\\<\end{Bmatrix}mE$$

so ist $mE:nF\begin{Bmatrix}=\\>\end{Bmatrix}nD:nF$ (Satz 7.8.) weil $mE\begin{Bmatrix}=\\>\end{Bmatrix}nD$

aber $mA:nB=mE:nF$ (Satz 4.), weil $A:B=E:F$ (Vorauss.)

Also $mA:nB\begin{Bmatrix}=\\>\end{Bmatrix}nD:nF$ (Satz 11. 13.)

Hingeg. $mA:mC>mA:nB$ (Satz 8.), weil $mC<nB$.

Daher $mA:mC\begin{Bmatrix}>\\=\\<\end{Bmatrix}nD:nF$ (Satz 13.), weil $A:C=mA:mC$ (Satz
$D:F$ (S. 13. Zus. 1.), weil $nD:nF=D:F$) 15.).

2. Es seyen $A:B>E:F$; also (Def. 7.) für gewisse n, m,

$$nA>mB, \text{ aber } nE\begin{Bmatrix}=\\<\end{Bmatrix}mF:$$

$B:C=D:E$

so ist $nA:nC>mB:nC$ (Satz 8.), weil $nA>mB$,

aber $mB:nC=mD:nE$ (Satz 4.), weil $B:C=D:E$ (Vorauss.).

Mithin $nA:nC>mD:nE$ (Satz 13. Zus. 1.)

ferner $mD:nE\begin{Bmatrix}=\\>\end{Bmatrix}mD:mF$ (Satz 7. 8.), weil $nE\begin{Bmatrix}=\\<\end{Bmatrix}mF$

also $nA:nC\begin{Bmatrix}>\\=\\<\end{Bmatrix}mD:mF$ (Satz 13. Zus. 1. 3.)

$A:C\begin{Bmatrix}>\\=\\<\end{Bmatrix}mD:mF$ (Satz 13.), weil $A:C=nA:nC$ (Satz
$D:F$ (S. 13. Zus. 1.), weil $mD:mF=D:F$) 15.)

3. Es seyen

$A:B>E:F$; also für gewisse n, m; $nA>mB$, aber $nE\begin{Bmatrix}=\\<\end{Bmatrix}mF$

$B:C>D:E$; p, q; $pB>qC$, $pD\begin{Bmatrix}=\\<\end{Bmatrix}qE$.

So sind hingegen

$pnA>pmB$ (Satz 1. Zus. 1.); $npD\begin{Bmatrix}=\\<\end{Bmatrix}nqE$ (Satz A. Satz 1. Zus. 1.)

$npB>mqC$ $qnE\begin{Bmatrix}=\\<\end{Bmatrix}qmF$

weil $pmB=mpB$ (Satz 3. nr. 3. Satz 2. Zus. 1.) weil wieder $nqE=qnE$

$pnA>mqC$ $npD\begin{Bmatrix}=\\<\end{Bmatrix}qmF$

oder $pnD\begin{Bmatrix}=\\<\end{Bmatrix}mqF$ (Satz 3. nr. 3. Satz 2. Zus. 1.)

folglich $A:C>D:F$ (Defin. 7.).

Satz 24.

1. Wenn $AB:C=DE:F$
und $BG:C=EH:F$

so sind $AB:C=DE:F$ (Vorauss.)
$C:BG=F:EH$ (Vorauss. u. Satz 4. Zus.)
$AB:BG=DE:EH$ (Satz 22.)

daher $AG : GB = DH : HE$ (Satz 18.)
und wegen $BG : C = GH : F$ (Vorauss.)

$AG : C = HD : F$ (Satz 22.)

2. Allgemeiner: wenn

$A : C = D : F$
$B : C = E : F$

so sind $A : C = D : F$ (Vorauss.)
$C : B = F : E$ (Vorauss. und Satz 4. Zus.)

$A : B = D : E$ (S. 22.): daher $D > E$, wenn $A > B$ (Satz G.).

folglich $A+B : B = D+E : E$ (Satz 18. 17.)
und wegen $B : C = E : F$ (Vorauss.)

$A+B : C = D+E : F$ (S. 22.) S. Simsons Zus. 1. zu S. 24.

3. Wenn $A : C = D : F$
$B : C = E : F$
$G : C = H : F$
u. s. w.

so ist 1) $A+B : C = D+E : F$ (Satz 24.)
und nun 2) $A+B+G : C = D+E+H : F$
u. s. w. S. Simsons Zus. 2. zu Satz 24.

4. Auch $A+B : 2C = D+E : 2F$
$A+B+G : 3C = D+E+H : 3F$ (Satz 4. nr. 2.).
u. s. w.

Satz 25.

1. Wenn vier „gleichartige" Gröfsen proportional, „und so geordnet sind, dafs die erste gröfser als jede der zwei mittleren, folglich (Satz 14. und G.) die vierte die kleinste ist": so ist die Summe der äufseren gröfser als die Summe der mittleren.

2. Bew. Es seyen $AB : CD = E : F$;
und AB sowohl $> CD$, $E > F$ (Satz G.), folglich F
als $> E$; daher auch $CD > F$ (Satz 14.), die kleinste.
Constr. $AG = E$, $CH = F$. Also $AB : CD = AG : CH$ (Vorauss. V, 7. 11.)
$= BG : DH$ (Satz 19)
$BG > DH$ (Satz G.), weil $AB > CD$ (Vorauss.)
$AG+F = E+CH$ (Ax. 2.) weil $AG = E$, $F = CH$ (Constr.)

$AB+F > CD+E$ (Ax. 4.).

3. Oder es seyen
$A : B = C : D$, und $A > B$, also auch $C > D$ (Satz G, a.)
$> C$ $B > D$ (Satz 14.)
So ist $A : B = A-C : B-D$ (Satz 19.)
$A-C > B-D$ (Satz G, a.), weil $A > B$
$C+D = C+D$

$A+D > B+C$

4. Anders. $A-B : B = C-D : D$ (Satz 17.)
$A-B > C-D$ (Satz 14.), weil $B > D$
$B+D = B+D$

$A+D > B+C$.

Zusätze.

1. Sind hingegen vier Gröfsen arithmetisch proportional; so ist die Summe der äufsern gleich der Summe der mittleren.

1. Nämlich wenn $A-B=C-E$; so mufs, wenn $A=B+F$, auch $C=E+F$ seyn. Diesem nach ist sowohl $\left.\begin{matrix}A+E\\B+C\end{matrix}\right\}=B+E+F$.

2. Vier gleichartige Gröfsen können nicht zugleich geometrisch und arithmetisch proportional seyn.

3. Sondern, wenn vier gleichartige Gröfsen A,B,C,D geometrisch proportional, und die erste A die gröfste ist: so ist die vierte D gröfser als die vierte arithmetische Proportionalgröfse E zu den nämlichen dreien A,B,C.

Denn $A+D>B+C$ (Satz 25.)
$>A+E$ (Zus. 1.): daher $D>E$.

Beisp. $24 : 16 = 15 : 10$, $24 - 16 = 15 - 7$.

4. Sind drei Gröfsen stetig geometrisch proportionirt: so ist Summe der äufseren gröfser als das Doppelte der mittleren (Satz 25.).

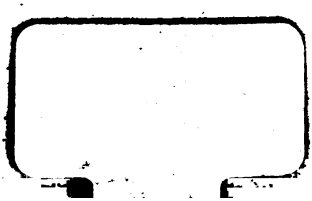
5. Sind hingegen drei Gröfsen stetig arithmetisch proportional; so ist die Summe der äufseren gleich dem Doppelten der mittleren (Zus. 1).

6. Die mittlere geometrische Proportionalgröfse zwischen zwei gegebenen Gröfsen ist daher kleiner als die mittlere arithmetische Proportionalgröfse zwischen eben denselben Gröfsen.

Nämlich wenn
$A : B=B : C$: so ist $2B<A+C$ (Zus. 4.)
$A-G=G-C$ $<2G$ (Zus. 5.); $B<G$.

Beispiel.

$24 : 12=12 : 6$ (wenn $24=mB$; so ist $B=m\times 6$;
$24=mB=m^2\times 6$, $m^2=4$, $m=2$)
$24-15=15-6$.

Druckfehler.

p. 11. Z. 13 v. o. aufzufassen statt auffassen.
p. 24. Z. 10 v. u. $\frac{B}{m}: B$ statt $\frac{B:}{m} B$
p. 27. Z. 6 v. o. $EG:FG=$ statt $EG, FG=$
p. 35. Z. 2 v. u. $<\frac{r+1}{n}(B+D+F+B+$ u. s. w.) statt $>$
p. 50. Z. 12 v. u. diesen statt dieser
p. 57. Z. 16 v. o. die zweite B statt die zweite
p. 58. Z. 9 v. u. kleineren statt zweiten
p. 60. Z. 15 v. u. $A+C:B+D$ statt $A+C\cdot B+D$
p. 64. sind unten die Pagina der Citationen verwechselt worden.
p. 75. Z. 15 v. o. nur $>$ statt nur $<$
p. 83. Z. 26 v. o. *sit* statt *si*
p. 87. Z. 19 v. u. $r\times nC+rE$ statt $r\times nC\times rE$
p. 88. Z. 1 v. o. $A:B>C:D$ statt $>B:D$
p. 98. Z. 12 v. o. ist *Fig. zu Lor. Uebers.* auszustreichen.
p. 101. Z. 22 v. o. B. VII. statt B. VIII.
p. 102. Z. 5 v. u. *quando* statt *quanto*
p. 108. Z. 10 v. o. λογων statt λογον
Das. Z. 26 v. o. προτς statt προτς
p. 110. Z. 6 v. o. *exhibentes,* statt *ex hibentes,*
Das. Z. 9 v. o. *patet,* statt *patet;*
p. 112. Z. 19 v. o. Gröfse B statt Gröfse
p. 116. Z. 6 v. u. $13\sqrt{3}>{}^{7}/_{541}$, statt $>{}^{7}/_{541}$.
p. 124. Z. 7 v. u. lies «vier oder» mehrere «gleichartige»
p. 126 Z. 7 v. u. $mB:nC\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}mB:mD$ statt $mB:mC\left\{\begin{matrix}=\\>\end{matrix}\right\}$ etc.
p. 132. Letzte Zeile lies $=C+D:\left\{\begin{matrix}C\\D\end{matrix}\right.$; statt $C+D$ etc.